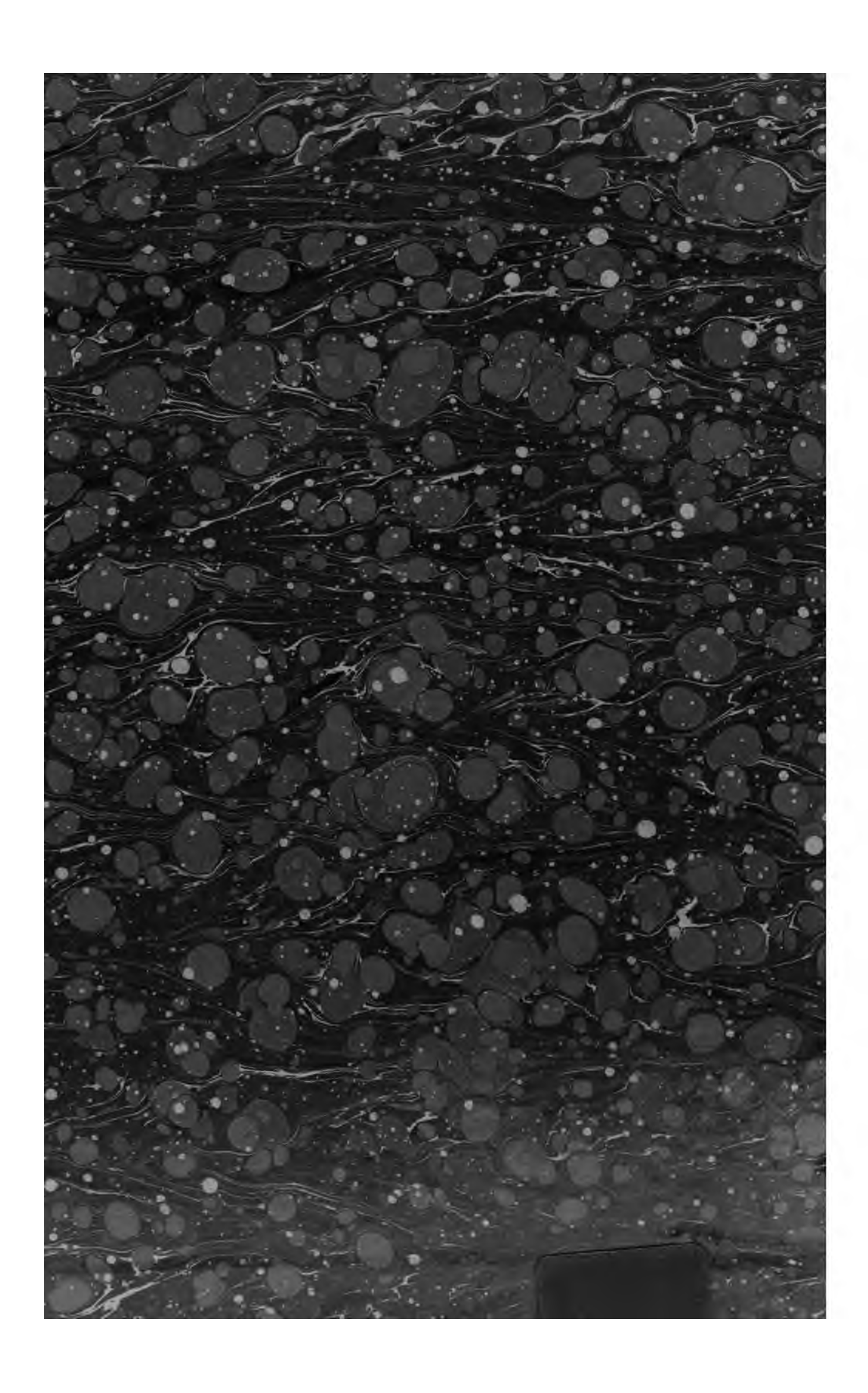










Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 125.

Heft I/II.

Ausgegeben den 29. November.



Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1902.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 125.

In vier Heften.



Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107-8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1903.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 125.



Am Nachmittage des 26. April starb unerwartet Herr *L. Fuchs,* der verdienstvolle Herausgeber dieser Zeitschrift. Seit dem Jahre 1861 war der Dahingegangene ein eifriger Mitarbeiter des *Crelle*schen Journals; durch den Abdruck seiner grundlegenden Abhandlung „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten rationale Functionen einer Veränderlichen sind", wurde zuerst die allgemeine Aufmerksamkeit der Mathematiker auf den jungen Gelehrten gelenkt, welcher hier der Analysis ein neues fruchtbares Gebiet erschloss. Die achtundzwanzig grösseren und kleineren Arbeiten, welche diese Zeitschrift ihm verdankt, bilden einen grossen und schönen Theil seiner eigenen Lebensarbeit, und können mit zu dem Werthvollsten gerechnet werden, was das *Crelle*sche Journal in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts veröffentlicht hat.

Es ist hier nicht der Ort, die wissenschaftlichen Arbeiten des Dahingegangenen nach Verdienst zu würdigen. In einem der nächsten Bände werden aber die Leser des Journales eine eingehende Schilderung seines Lebenswerkes finden. Hier soll nur dem Danke für seine zehnjährige verdienstvolle Thätigkeit als Herausgeber des *Crelle*schen Journals Ausdruck gegeben werden.

Von dem vorliegenden Bande ab ist die Leitung dieser Zeitschrift mir übertragen worden, und zu meiner grossen Freude haben die Herren *Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky* und *Schwarz* sich bereit erklärt, mich bei dieser schweren und verantwortungsvollen Aufgabe durch ihre Mitwirkung zu unterstützen. Ich werde meine beste Kraft daran setzen, dass das „Journal für die reine und angewandte Mathematik" weiter die Wege gehe, welche ihm durch seine früheren Leiter *Crelle, Borchardt, Weierstrass, Kronecker* und *Fuchs* vorgezeichnet sind, und ich möchte gleichzeitig an alle Forscher auf dem Gebiete der Mathematik die Aufforderung richten, die reifen Ergebnisse ihrer Untersuchungen dem Journal für Mathematik zur Veröffentlichung anvertrauen zu wollen.

Berlin, den 1. October 1902.

Kurt Hensel.

Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen in der Variationsrechnung.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Das Verfahren, die zweite Variation eines einfachen Integrales mit einer zu ermittelnden Function zu untersuchen, welches *Jacobi* im 17. Bd. dieses Journals in den Grundzügen gegeben hat, ist bekanntlich von *Hesse* im 54. Bd. dieses Journals ausführlich entwickelt worden. An diese Untersuchungen von *Jacobi* und *Hesse* knüpft die vorliegende Abhandlung an und bringt mit denselben die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit analytischen Functionen als Coefficienten in Verbindung.

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen sei $f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$, x die unabhängige reelle Variable zwischen den Grenzen a und b, y die unbekannte reelle Function von x, $y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}$. Die gesuchte Function y wird aus der Differentialgleichung, die durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrals hervorgeht, durch Integration erhalten, die eingehenden Constanten seien den Endbedingungen gemäss bestimmt. Jn einem Streifen in der Constructionsebene der complexen Variablen x, der die Strecke auf der Axe des Reellen von a bis b im Innern enthält, sei die gefundene Function y eine einwerthige und stetige analytische Function von x. Dasselbe sei in Bezug auf die Functionen $\frac{\partial f}{\partial y^{(p)}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)} \partial y^{(q)}}$ der Fall. Die *Jacobi*sche Bedingung sei erfüllt, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ auf der Strecke von a bis b nicht verschwindet.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich auf Grund einfacher Erwägungen aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit analytischen Functionen als Coefficienten von vornherein Folgendes erkennen:

Es bestehen zu der gefundenen Curve y immer Scharen unendlich benachbarter Curven, so dass das vorliegende Integral für die Curve y ein Maximum bezüglich Minimum $\left(\textit{gemäss dem Vorzeichen von } \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}}\right)$ *wird, und zwar haben im allgemeinen die Scharen der Nachbarcurven von y diese Eigenschaft.*

Dies wird in der ersten Abtheilung gezeigt werden. In der zweiten Abtheilung wird nachgewiesen, dass das Entsprechende auch für die isometrischen Aufgaben gilt. In der dritten Abtheilung wird das Vorstehende auf Beispiele angewandt.

Erste Abtheilung.

1.

Angabe der hier vorkommenden Sätze von *Jacobi* und *Hesse*.

Es liege das Integral vor

$$(1.)\qquad \int_a^b f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})\,dx,$$

f eine reelle Function von x, y, $y^{(1)}$ bis $y^{(n)}$, wo $y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}$ ist, a und b reell. Für y wird gesetzt $y + \varepsilon z$. ε ist eine in der Nähe von Null variirende reelle Grösse, z eine beliebige reelle Function von x, welche von a bis b endlich und stetig bleibt; ebenso beschaffen seien die Ableitungen von z nach x bis zur $2n$-ten Ordnung, in welcher Ordnung dieselben vorkommen. z soll mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen für $x = a$ und b verschwinden.

Wenn für $\varepsilon = 0$ ein Maximum bezüglich Minimum des Integrales (1.) eintreten soll, so muss der erste Differentialquotient des Integrales nach ε, die erste Variation, für $\varepsilon = 0$ verschwinden. Dieses führt in bekannter Weise (vergl. *Hesse* l. c. S. 231) auf folgende Differentialgleichung, worin

$$(2.)\qquad \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}} = f'(y^{(p)})$$

gesetzt ist:

$$(3.)\qquad f'(y) - \frac{d}{dx}f'(y^{(1)}) + \frac{d^2}{dx^2}f'(y^{(2)}) - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f'(y^{(n)}) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist $2n$-ter Ordnung, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ nicht verschwindet, was im Weiteren als Bedingung gefordert wird. Aus dieser Differentialgleichung soll y als reelle Function von x mit $2n$ Constanten hervorgehen. Die Constanten seien so bestimmt, dass die gegebenen reellen Grenzwerthe von y und seinen $n-1$ ersten Ableitungen in $x = a$ und b erhalten werden.

Der zweite Differentialquotient des Integrals (1.) nach ε, die zweite Variation, wird durch folgenden Ausdruck gegeben. Es sei

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)} \partial y^{(q)}} = a_{pq}, \tag{4.}$$

$$\frac{d^r z}{d x^r} = z^{(r)} \tag{5.}$$

und

$$\left\{ \begin{aligned} 2\psi = a_{00} z z + 2 a_{01} z z^{(1)} + a_{11} z^{(1)} z^{(1)} \\ + \cdots + 2 a_{n-1,n} z^{(n-1)} z^{(n)} + a_{nn} z^{(n)} z^{(n)} \end{aligned} \right. \tag{6.}$$

gesetzt, so wird der zweite Differentialquotient

$$2 \int_a^b \psi \, dx. \tag{7.}$$

Dieser Differentialquotient soll für $\varepsilon = 0$ bei den verschiedenen Functionen z ein und dasselbe Vorzeichen haben. Dieses Vorzeichen entscheidet in der *Taylor*schen Entwicklung des Integrales (1.) nach Potenzen von ε mit dem Restgliede bei ε^2, ob ein Maximum oder Minimum eintritt.

Das Integral $\int_a^b \psi \, dx$ für $\varepsilon = 0$ wird, weil z mit seinen $n-1$ ersten Ableitungen für $x = a$ und b verschwindet, gleich folgendem Integrale. Es werde

$$\frac{\partial \psi}{\partial z^{(r)}} = \psi'(z^{(r)}) \tag{8.}$$

gesetzt und

$$\left\{ \begin{aligned} \psi'(z) - \frac{d}{dx} \psi'(z^{(1)}) + \frac{d}{dx^2} \psi'(z^{(2)}) \\ - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \psi'(z^{(n)}) = \Psi(z), \end{aligned} \right. \tag{9.}$$

so wird

$$(10.)\qquad 2\int_a^b \psi\, dx = \int_a^b z\,\Psi(z)\, dx,$$

(*Hesse* l. c. S. 231, 247) und es kommt weiter auf die Behandlung von

$$(11.)\qquad \int_a^b z\,\Psi(z)\, dx$$

an.

Der Differentialausdruck $2n$-ter Ordnung (9.), worin z beliebig gelassen wird, lässt sich immer auf die Form

$$(12.)\qquad \mathfrak{A}_0 z - \frac{d}{dx}\mathfrak{A}_1 z^{(1)} + \frac{d^2}{dx^2}\mathfrak{A}_2 z^{(2)} - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\mathfrak{A}_n z^{(n)}$$

bringen (*Hesse* l. c. S. 236). Durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Ableitungen von z in (9.) und (12.) ergeben sich die Grössen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_{n-1}$ bis $\mathfrak{A}_0$ successive eindeutig als ganze rationale Ausdrücke der Grössen a_{pq} (4.) und ihrer Ableitungen nach x bestimmt. Es ist, wenn $\frac{d^r a_{pq}}{dx^r} = a_{pq}^{(r)}$ gesetzt wird,

$$(13.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_n = a_{nn}, \\ \mathfrak{A}_0 = a_{00} - a_{01}^{(1)} + a_{02}^{(2)} - \cdots (-1)^n a_{0n}^{(n)}. \end{cases}$$

Es werde für z

$$(14.)\qquad z = u z_1$$

eingesetzt. $\frac{d^r u}{dx^r}$ sei durch $u^{(r)}$, $\frac{d^r z_1}{dx^r}$ durch $z_1^{(r)}$ bezeichnet, also

$$z^{(1)} = u^{(1)} z_1 + u z_1^{(1)} \text{ etc.}$$

Hierdurch geht die Function (6.) 2ψ der Grössen z, $z^{(1)}$ bis $z^{(n)}$ in eine Function $2\psi_1$ der Grössen z_1, $z_1^{(1)}$ bis $z_1^{(n)}$ über. Der Coefficient von $z_1^{(n)} z_1^{(n)}$ in $2\psi_1$ ist

$$(15.)\qquad a_{nn} u^2.$$

Der (8.) und (9.) entsprechende Differentialausdruck

$$(16.)\qquad \psi_1'(z_1) - \frac{d}{dx}\psi_1'(z_1^{(1)}) + \frac{d^2}{dx^2}\psi_1'(z_1^{(2)}) - \cdots (-1)^n \frac{d^n \psi_1'(z_1^{(n)})}{dx^{(n)}} = \Phi(z_1)$$

kann entsprechend (12.) auf die Form

$$(17.)\qquad \mathfrak{B}_0 z_1 - \frac{d}{dx}\mathfrak{B}_1 z_1^{(1)} + \frac{d^2}{dx^2}\mathfrak{B}_2 z_1^{(2)} - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\mathfrak{B}_n z_1^{(n)}$$

gebracht werden.

Man geht nun von dem Differentialausdrucke (12.) aus — derselbe sei jetzt durch $\Psi(z)$ bezeichnet — und hat also weiter das Integral

$$(18.)\qquad \int_a^b z\,\Psi(z)\,dx$$

zu behandeln. $\Psi(z)$ stimmt mit der Form (9.) überein, wenn für $2\psi(z)$ gesetzt wird

$$(19.)\qquad 2\psi = \mathfrak{A}_0 z^2 + \mathfrak{A}_1 (z^{(1)})^2 + \mathfrak{A}_2 (z^{(2)})^2 + \cdots + \mathfrak{A}_n (z^{(n)})^2.$$

Nun wird aus (19.) 2ψ durch die Substitution (14.) $z = uz_1$ der Ausdruck $2\psi_1$ gebildet und aus diesem die Ausdrücke (16.), (17.), wodurch die Grössen $\mathfrak{B}_0$ bis $\mathfrak{B}_n$ bestimmt sind, und gemäss (13.) und (15.)

$$(20.)\qquad \mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}_n u^2 = a_{nn} u^2$$

ist. Es werde

$$(21.)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{B}_1 z_1^{(1)} - \frac{d}{dx}\mathfrak{B}_2 z_1^{(2)} + \frac{d^2}{dx^2}\mathfrak{B}_3 z_1^{(3)} \\ &\qquad - \cdots (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\mathfrak{B}_n z_1^{(n)} = \Psi_1(z_1^{(1)}) \end{aligned} \right.$$

gesetzt, wo also $\Psi_1(z_1^{(1)})$ in Bezug auf $z_1^{(1)}$ ein Differentialausdruck $2(n-1)$-ter Ordnung ist. Dann besteht bei beliebigen u und z_1 die Relation

$$(22.)\qquad u\,\Psi(z) - z\,\Psi(u) = -\frac{d}{dx}\Psi_1(z_1^{(1)})$$

(*Hesse,* l. c. S. 241, 242).

Jetzt wird in dem Integral (18.), worin $\Psi(z)$ der lineare Differentialausdruck (12.) $2n$-ter Ordnung ist, $z = uz_1$ gesetzt und für u ein Integral der Differentialgleichung $\Psi(u) = 0$ genommen. Hierbei sei vorausgesetzt, dass dieses Integral u auf der Strecke x von a bis b reell, endlich und stetig ist und dort nirgends verschwindet. z ist nun die bei (1.) angegebene Function von x. z_1 verschwindet dann mit den $n-1$ ersten Ableitungen für $x = a$ und b. Vermittelst der Relation (22.) wird das Integral (18.)

$$(23.)\qquad \int_a^b z\,\Psi(z)\,dx = \int_a^b z_1 u\,\Psi(z)\,dx = \int_a^b z_1^{(1)}\Psi_1(z_1^{(1)})\,dx.$$

Das Integral

$$(24.)\qquad \int_a^b z_1^{(1)}\,\Psi_1(z_1^{(1)})\,dx$$

ist von derselben Art, wie das Integral (18.) und wird in derselben Weise behandelt. $\Psi_1(z_1^{(1)})$ ist der lineare Differentialausdruck (21.) $2(n-1)$-ter Ordnung in Bezug auf $z_1^{(1)}$. Es wird $z_1^{(1)} = v_1^{(1)} z_2^{(1)}$ gesetzt. $\Psi_2(z_2^{(2)})$ sei der lineare Differentialausdruck $2(n-2)$-ter Ordnung in Bezug auf $z_2^{(2)}$, der aus $\Psi_1(z_1^{(1)})$ durch die Substitution $z_1^{(1)} = v_1^{(1)} z_2^{(1)}$ gerade so entsteht, wie $\Psi_1(z_1^{(1)})$ durch die Substitution $z = uz_1$ aus $\Psi(z)$ entstanden ist. Dieser Differentialausdruck $\Psi_2(z_2^{(2)})$ sei

$$(25.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{C}_2 z_2^{(2)} - \frac{d}{dx}\,\mathfrak{C}_3 z_2^{(3)} + \frac{d^2}{dx^2}\,\mathfrak{C}_4 z_2^{(4)} \\ &\qquad\qquad - \cdots (-1)^{n-2}\,\frac{d^{n-2}\,\mathfrak{C}_n z_2^{(n)}}{dx^{n-2}} = \Psi_2(z_2^{(2)}), \end{aligned}\right.$$

worin

$$(26.)\qquad \mathfrak{C}_n = \mathfrak{B}_n\,(v_1^{(1)})^2$$

ist. Dann besteht bei beliebigen $v_1^{(1)}$ und $z_2^{(1)}$ die Relation

$$(27.)\qquad v_1^{(1)}\,\Psi_1(z_1^{(1)}) - z_1^{(1)}\,\Psi_1(v_1^{(1)}) = -\frac{d}{dx}\,\Psi_2(z_2^{(2)}).$$

Nun sei $v_1^{(1)}$ ein Integral der Differentialgleichung $\Psi_1(v_1^{(1)}) = 0$. Hierbei gilt wieder die Voraussetzung, dass dieses Integral $v_1^{(1)}$ auf der Strecke x von a bis b reell, endlich und stetig sei und dort nirgends verschwinde. In dem Integrale (24.) ist $z_1^{(1)}$ der erste Differentialquotient von z_1, und z_1 durch $z = uz_1$ aus z entstanden, wo z die bei (1.) genannte Function ist. $z_2^{(1)}$ verschwindet also mit den $n-2$ ersten Differentialquotienten für $x = a$ und b. Aus dem Integral (24.) entsteht nun mittelst der Relation (27.)

$$(28.)\qquad \int_a^b z_1^{(1)}\,\Psi_1(z_1^{(1)})\,dx = \int_a^b z_2^{(1)}\,v_1^{(1)}\,\Psi_1(z_1^{(1)})\,dx = \int_a^b z_2^{(2)}\,\Psi_2(z_2^{(2)})\,dx.$$

Es ist gemäss (13.), (20.), (26.):

$$(29.)\qquad \mathfrak{A}_n = a_{nn} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\,\partial y^{(n)}},\qquad \mathfrak{B}_n = a_{nn}\,u^2,\qquad \mathfrak{C}_n = a_{nn}\,(u\,v_1^{(1)})^2.$$

In derselben Weise ist fortzufahren immer unter derselben Voraussetzung wie bei u, $v_1^{(1)}$ in Bezug auf die neu eintretenden Integrale der suc-

cessive auftretenden linearen Differentialgleichungen. Man erhält nach der n-ten Transformation das Integral (18.) durch den Ausdruck

$$(30.)\qquad \int_a^b a_{nn}\,(u\,v_1^{(1)}\,w_2^{(2)}\dots z_n^{(n)})^2\,dx$$

gegeben (*Hesse* l. c. S. 248). Es bestanden also die Substitutionen

$$(31.)\qquad z = u\,z_1,\quad z_1^{(1)} = v_1^{(1)}\,z_2^{(1)},\quad z_2^{(2)} = w_2^{(2)}\,z_3^{(2)}\ \text{etc.},$$

wo u, $v_1^{(1)}$, $w_2^{(2)}$ etc. bezüglich Integrale der n linearen Differentialgleichungen

$$(32.)\qquad \Psi(z) = 0,\quad \Psi_1(z_1^{(1)}) = 0,\quad \Psi_2(z_2^{(2)}) = 0\ \text{etc.}$$

waren, $\Psi(z)$ der Differentialausdruck (12.), $\Psi_1(z_1^{(1)})$ der Differentialausdruck (21.)

$$(33.)\qquad u\,\Psi(z) = -\frac{d}{dx}\,\Psi_1(z_1^{(1)}),$$

$\Psi_2(z_2^{(2)})$ der Differentialausdruck (25.)

$$(34.)\qquad v_1^{(1)}\,\Psi_1(z_1^{(1)}) = -\frac{d}{dx}\,\Psi_2(z_2^{(2)})\ \text{etc.}$$

Es werden aus den Functionen (31.) die n Functionen gebildet

$$(35.)\qquad \begin{cases} u = u, \\ v = u\int v_1^{(1)}\,dx, \\ w = u\int dx\,v_1^{(1)}\int w_2^{(2)}\,dx, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die Determinante dieser n Functionen und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen

$$(36.)\qquad \begin{vmatrix} u\ u^{(1)}\dots u^{(n-1)} \\ v\ v^{(1)}\dots v^{(n-1)} \\ w\ w^{(1)}\dots w^{(n-1)} \\ \dots\dots \end{vmatrix} = \triangle_n$$

ist

$$(37.)\qquad \triangle_n = u^n\,(v_1^{(1)})^{n-1}\,(w_2^{(2)})^{n-2}\cdots.$$

Sodann geht aus (31.) hervor

$$(38.)\qquad z = u\int dx\,v_1^{(1)}\int dx\,w_2^{(2)}\int\cdots\int z_n^{(n)}\,dx.$$

Die Determinante der $n+1$ Functionen (35.) und (38.) und ihrer n ersten Ableitungen

$$(39.)\qquad \begin{vmatrix} u & u^{(1)} \dots & u^{(n)} \\ v & v^{(1)} \dots & v^{(n)} \\ w & w^{(1)} \dots & w^{(n)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ z & z^{(1)} \dots & z^{(n)} \end{vmatrix} = \Delta$$

ist

$$(40.)\qquad \Delta = u^{n+1}(v_1^{(1)})^n(w_2^{(2)})^{n-1}\dots z_n^{(n)}.$$

Daher ergiebt sich der in dem Integrale (30.) vorkommende Ausdruck

$$(41.)\qquad u\,v_1^{(1)}w_2^{(2)}\dots z_n^{(n)} = \frac{\Delta}{\Delta_n}.$$

Aus den Differentialgleichungen (32.) mit den Beziehungen (31.), (33.), (34.), etc. folgt in Bezug auf die Functionen (35.) dieses. u sei irgend ein Integral der Differentialgleichung $\Psi(z) = 0$, und in einem Gebiete, wo u nicht verschwindet, mit u der Differentialausdruck $\Psi_1(z_1^{(1)})$ gebildet. Nun sei $v_1^{(1)}$ irgend ein Integral von $\Psi_1(z_1^{(1)}) = 0$ und in einem Gebiete, wo $v_1^{(1)}$ nicht verschwindet, mit $v_1^{(1)}$ der Differentialausdruck $\Psi_2(z_2^{(2)})$ gebildet. Alsdann sei $w_2^{(2)}$ irgend ein Integral von $\Psi_2(z_2^{(2)}) = 0$ etc. Dann sind gemäss (31.), (33.), (34.) etc. die Functionen (35.) u, v, w etc. n Integrale der Differentialgleichung $2n$-ter Ordnung $\Psi(z) = 0$ (*Hesse* l. c. S. 249, 250).

2.

Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit analytischen Functionen der unabhängigen Variablen x als Coefficienten und einer abhängigen Variablen kommt hier der Grundsatz in Anwendung:

In einem einfach zusammenhängenden Gebiete der Constructionsebene der complexen Variablen x seien die Coefficienten der Differentialquotienten einwerthige und stetige analytische Functionen von x, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Dann hat die homogene lineare Differentialgleichung $m$ter Ordnung ein Integral, welches in diesem Gebiete eine einwerthige und stetige analytische Function von x ist und in einem Punkte innerhalb dieses Gebietes mit den $m-1$ ersten Ableitungen vorgeschriebene Werthe besitzt und hierdurch eindeutig bestimmt ist.

Es seien n linearunabhängige in einem Gebiete x einwerthige und stetige analytische Functionen y_1, y_2 bis y_n. Dieselben werden auf die Form gebracht

$$(1.)\qquad \begin{cases} y_1 = v_1, \\ y_2 = v_1 \int v_2\, dx, \\ y_3 = v_1 \int dx\, v_2 \int v_3\, dx, \\ \vdots \\ y_n = v_1 \int dx\, v_2 \int dx\, v_3 \int \ldots \int v_n\, dx, \end{cases}$$

wo in jedem Theile des betrachteten Gebietes von x es auch einen solchen Bereich giebt, in dem die v nirgends verschwinden, da die y linearunabhängig sind. Aus den Ausdrücken der v

$$(2.)\qquad v_2 = \frac{d}{dx}\frac{y_2}{v_1},\quad v_3 = \frac{d}{dx}\frac{1}{v_2}\frac{d}{dx}\frac{y_3}{v_1},\quad v_4 = \frac{d}{dx}\frac{1}{v_3}\frac{d}{dx}\frac{1}{v_2}\frac{d}{dx}\frac{y_4}{v_1}\ \text{etc.}$$

geht alsdann hervor, dass dieselben die Form $\frac{\chi(x)}{\psi(x)}$ haben, wo $\chi(x)$ und $\psi(x)$ in dem ursprünglichen Gebiete von x einwerthige und stetige analytische Functionen sind, die nicht identisch verschwinden. In einem einfach zusammenhängenden Gebiete S, die Begrenzungscurve einbegriffen, welches innerhalb des vorhin betrachteten einfach zusammenhängenden Gebietes von x liegt, werden die Functionen $\chi(x)$ und $\psi(x)$ in einer endlichen Anzahl von Punkten Null. Daher werden die Grössen v in S auch nur in einer *endlichen* Anzahl von Punkten Null oder unendlich.

Auf diesen Sätzen beruht die hier vorkommende Anwendung.

Es lag *N*1 (1.) das Integral

$$(3.)\qquad \int_a^b f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})\, dx$$

vor, $y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}$. Durch Integration der Differentialgleichung *N*1 (3.), vermöge welcher die erste Variation des Integrales (3.) verschwindet, geht y als Function von x mit $2n$ Constanten hervor. Diese Constanten seien so bestimmt, dass y mit seinen Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung für die reellen Werthe $x = a$ und b gegebene reelle Werthe erhalte, y sei dann auf der Strecke x von a bis b eine reelle Function.

Jetzt wird folgende Voraussetzung gemacht: In einem Streifen T in der Constructionsebene der complexen Variabeln x, innerhalb dessen die Strecke auf der Axe des Reellen von a bis b liegt, sei die gefundene Function y eine *einwerthige und stetige analytische* Function von x; für $x = a$ bis b ist y reell, daher überhaupt für reelle x in T.

Die Werthe, welche $y^{(0)} = y$, $y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}$ für x von a bis b annimmt, mögen in dem Intervalle $\alpha^{(r)}$ bis $\beta^{(r)}$ liegen, $\alpha^{(r)} < \beta^{(r)}$. Jede der Functionen

$$(4.)\qquad f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}),\ \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)}\partial y^{(q)}}$$

sei durch

$$(5.)\qquad \varphi(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$$

bezeichnet. $\varkappa$ soll positiv (> 0) der Art sein, dass $\varphi(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ eine endliche und stetige reelle Function der unabhängig genommenen Variablen $x, y, y^{(1)}$ bis $y^{(n)}$ ist, wenn x in dem Intervalle a bis b, y in dem Intervalle $\alpha - \varkappa$ bis $\beta + \varkappa$, $y^{(r)}$ in dem Intervalle $\alpha^{(r)} - \varkappa$ bis $\alpha^{(r)} + \varkappa$ bleibt.

Die Ausdrücke

$$(6.)\qquad \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)}\partial y^{(q)}},$$

in welche die gefundene Function y eingesetzt ist, sollen in dem Streifen *T einwerthige und stetige analytische Functionen von x sein.*

Sodann wird zur Anwendung der in $N1$ vorgetragenen *Jacobi-Hesse*schen Theorie vorausgesetzt, dass die Function

$$(7.)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}}$$

auf der Strecke x von a bis b nirgends verschwindet. Diese Function bleibt dann auch wegen der Voraussetzung bei (6.) innerhalb eines Streifens wie T von Null verschieden. —

Durch die genannte vor (7.) stehende Voraussetzung wird gegeben, dass die Differentiation des Integrales $N1$ (1.) nach ε durch Differentiation unter dem Integralzeichen zulässig ist, dass die erste Variation für $\varepsilon = 0$ verschwindet, und dass die zweite Variation für $\varepsilon = 0$ durch das Integral $N1$ (7.) und sodann durch das Integral $N1$ (18.) ausgedrückt ist. Letzteres Integral ist nun weiter zu behandeln.

In dem homogenen linearen Differentialausdruck $N1$ (12.) $\Psi(z)$ $2n$ter Ordnung sind die Coefficienten $\mathfrak{A}$ in dem Streifen T einwerthige und stetige

analytische Functionen, der Coefficient der höchsten Ableitung $\mathfrak{A}_n = \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}}$ ist innerhalb desselben Streifens von Null verschieden. Die homogene lineare Differentialgleichung $\frac{1}{\mathfrak{A}_n} \Psi(z) = 0$ mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 hat daher innerhalb des Streifens T einwerthige und stetige analytische Functionen als Coefficienten der Differentialquotienten, welche Functionen von x von a bis b und daher überhaupt für reelle x in T reell sind.

Es wird nun ein Integral u dieser Differentialgleichung genommen, welches für einen reellen Werth x innerhalb T mit seinen $2n-1$ ersten Ableitungen reelle Werthe hat und daher als in T einwerthige und stetige analytische Function für reelle x in T reell ist. Mittelst u wird nach den Angaben *N1* (14.) bis (21.) der homogene lineare Differentialausdruck $2(n-1)$-ter Ordnung *N1* (21.) $\Psi_1(z_1^{(1)})$ gebildet. Die in demselben auftretenden Coefficienten $\mathfrak{B}$ sind in demselben Streifen T einwerthige und stetige analytische Functionen von x, welche für reelle x reell sind. Der Coefficient der höchsten Ableitung ist $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}_n u^2$ und wird in einem Gebiete innerhalb T in einer endlichen Anzahl von Punkten Null. In T wird ein Gebiet genommen, in welchem $\mathfrak{B}_n$ nicht verschwindet, welches ein Stück der Axe des Reellen enthält. In diesem Gebiete von x hat die homogene lineare Differentialgleichung $\frac{1}{\mathfrak{B}_n} \Psi_1(z_1^{(1)}) = 0$ mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 Coefficienten, die dort einwerthige und stetige analytische Functionen und für reelle x reell sind. In demselben Gebiete von x wird dann ein Integral $v_1^{(1)}$ letzterer Differentialgleichung genommen, welches für reelle x reell und eine einwerthige und stetige analytische Function ist. Mittelst $v_1^{(1)}$ wird in dem zuletzt betrachteten Gebiete von x der homogene lineare Differentialausdruck $2(n-2)$-ter Ordnung *N1* (25.) $\Psi_2(z_2^{(2)})$ gebildet. Die Coefficienten $\mathfrak{C}$ desselben sind dort einwerthige und stetige analytische Functionen, welche für reelle x reell sind. Der Coefficient der höchsten Ableitung $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{A}_n (u\, v_1^{(1)})^2$. Dann wird in diesem Gebiete wieder ein solches Gebiet genommen, in dem $\mathfrak{C}_n$ nicht verschwindet, welches ein Stück der Axe des Reellen enthält und von der Differentialgleichung $\frac{1}{\mathfrak{C}_n} \Psi_2(z_2^{(2)}) = 0$ ein Integral $w_2^{(2)}$ genommen, welches für reelle x reell ist u. s. w.

Vermittelst der auf diese Weise erhaltenen Functionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)}$ etc. werden die Ausdrücke *N1* (35.) u, v, w etc. für reelle x reell hergestellt als

n linearunabhängige Integrale von $\Psi(z) = 0$. Jedes dieser Integrale der Differentialgleichung $\frac{1}{\mathfrak{A}_n}\Psi(z) = 0$ ist innerhalb des Streifens T eine einwerthige und stetige analytische Function. Diese n Functionen sind durch *N1*(35.) auf die Form (1.) gebracht. Aus dem bei (2.) Gesagten ergiebt sich für die vorhin angegebenen Functionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)}$ etc., dass dieselben in T einwerthige analytische Functionen sind, die in jedem innerhalb T gelegenen Bereiche, die Begrenzung einbegriffen, nur in einer *endlichen* Anzahl von Punkten Null oder unendlich werden und für reelle x reell sind.

Die Functionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)}$ etc. werden auf der Strecke x von a bis b in einer endlichen Anzahl von Punkten Null oder Unendlich. Diese Punkte seien ξ_1, ξ_2 bis ξ_λ. Unter denselben können auch a oder b sein. Dann werden auseinanderliegende Stücke der Strecke a bis b, von denen jedes einen Punkt ξ enthält, ausgenommen. Dieselben können beliebig klein angenommen werden, sollen aber fixirt sein. Das Stück, welches ξ_r enthält, sei η_r. Es werden also die Theilstrecken

$$(8.)\qquad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\lambda$$

ausgenommen.

Die Function z bei dem Integrale *N1*(1.) sollte eine beliebige reelle Function von x sein, welche mit ihren Ableitungen bis zur $2n$-ten Ordnung von a bis b endlich und stetig ist und welche mit den Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung in $x = a$ und b verschwindet.

Diese Function z sei nun in den Theilstrecken η_1 bis η_λ (8.) gleich Null gesetzt. In einem zwischen zwei auf einander folgenden Strecken η_{r-1} bis η_r liegenden Stücke (bezüglich in dem Stücke zwischen a oder b und dem nächsten η) — dasselbe habe die Endpunkte a' und b' — sei z eine beliebige reelle Function von x die mit den Ableitungen bis zur $2n$-tenOrdnung endlich und stetig ist und mit diesen in $x = a'$ und b' verschwindet. Ist der Punkt a oder b unter den Punkten a' oder b', so sollen die Ableitungen von z bis zur $(n-1)$-ten Ordnung dort verschwinden.

Eine solche Function ist

$$(9.)\qquad (x-a')^{2n+1}(x-b')^{2n+1}\, w,$$

wo w eine beliebige reelle Function ist, welche mit ihren Ableitungen bis zur $2n$-ten Ordnung von a' bis b' endlich und stetig bleibt.

Die Function z erfüllt dann auf der Strecke x von a bis b die vorher genannten Bedingungen.

Es war das Integral *N1* (18.)

$$(10.)\qquad \int_a^b z\,\Psi(z)\,dx$$

weiter zu behandeln. Dieses Integral zerfällt dadurch, dass die Integrationsstrecke a bis b in die Stücke (8.) η_1 bis η_λ und die zwischen liegenden Stücke getheilt wird, in eine Summe einer endlichen Anzahl von Integralen. Das Integral über eine Strecke η_r ist Null, weil z dort gleich Null genommen ist. Es bleiben die Integrale über jede zwischen zwei Strecken η_{r-1} und η_r (bezüglich zwischen a oder b und dem nächsten η) liegende Strecke. Eine solche soll die Grenzpunkte a' und b' haben. Nun ist

$$(11.)\qquad \int_{a'}^{b'} z\,\Psi(z)\,dx$$

zu behandeln, in welchem z eine beliebige reelle Function ist, welche mit den Ableitungen bis zur $2n$-ten Ordnung von a' bis b' endlich und stetig bleibt und mit diesen in a' und b' verschwindet. (Ist $a' = a$ oder $b' = b$, so verschwinden dort die Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung.)

Für das Integral (11.) sind die Bedingungen erfüllt, welche auf den Ausdruck desselben *N1* (30.)

$$(12.)\qquad \int_{a'}^{b'} a_{nn}\,(u\,v_1^{(1)}\,w_2^{(2)}\dots z_n^{(n)})^2\,dx$$

führen. Die n Functionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)}$ etc., bezüglich Integrale der Differentialgleichungen *N1* (32.), sind von a' bis b' reell, endlich und stetig und verschwinden dort nirgends. Nach *N1* (41.) ist der Ausdruck

$$(13.)\qquad u\,v_1^{(1)}\,w_2^{(2)}\dots z_n^{(n)} = \frac{\Delta}{\Delta_n}.$$

Nach *N1* (37.) ist

$$(14.)\qquad \Delta_n = u^n\,(v_1^{(1)})^{n-1}\,(w_2^{(2)})^{n-2}\dots$$

also auf der Strecke a' bis b' reell endlich und stetig und nirgends gleich Null. Δ ist die Determinante *N1* (39.).

Diese Determinante Δ ist ein homogener linearer Differentialausdruck n-ter Ordnung in Bezug auf z. Der Coefficient von $\frac{d^n z}{dx^n}$ ist die Grösse Δ_n (14.). Die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung $\frac{\Delta}{\Delta_n} = 0$ mit

dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 hat in einem Streifen der Constructionsebene für x, innerhalb dessen die Strecke auf der Axe des Reellen a' bis b' liegt, einwerthige und stetige analytische Functionen als Coefficienten. Dieselbe hat, wie aus dem Ausdrucke $\triangle$ hervorgeht, zu Integralen die n Functionen u, v, w etc., welche durch die Ausdrücke *N1* (35.) aus den Functionen $u, v_1^{(1)}, w_2^{(2)}$ etc. gebildet sind. Letztere Ausdrücke sind nach dem oben Gesagten in dem Streifen T einwerthige analytische Functionen; dieselben sind auf der Strecke auf der Axe des Reellen a' bis b' und daher in einem Streifen, der diese Strecke enthält, endlich und von Null verschieden. Aus den Ausdrücken der Form *N1* (35.) geht hervor, dass jedes Integral der Differentialgleichung $\triangle = 0$ in diesem Gebiete eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der Integrale u, v, w etc. ist.

Wenn nun die Grösse z auf der ganzen Strecke x von a' bis b' die Gleichung $\triangle = 0$ erfüllte, so wäre dieselbe eine homogene lineare Verbindung von u, v, w etc. mit constanten Coefficienten. Werden diese Constanten in einem der Punkte a' oder b' durch $(n-1)$-malige Differentiation dieser linearen Verbindung und durch Auflösung des hierdurch entstehenden Systems von n linearen Gleichungen bestimmt, wobei die Determinante des Systems $\triangle_n$ von Null verschieden ist, so ergiebt sich, da dort z mit den $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet, dass die Constanten Null sein müssten. Also z wäre gleich Null.

Ist also z nicht auf der ganzen Strecke a' bis b' gleich Null, so auch $\triangle$ nicht, dann ist das Integral (12.) von Null verschieden und hat das Vorzeichen von a_{nn}.

Es hat sich also, wenn die oben nach (3.) angegebene Voraussetzung erfüllt ist, Folgendes ergeben:

Wenn z auf der Strecke x von a bis b eine beliebige endliche und stetige reelle Function ist, deren Ableitungen bis zur $2n$-ten Ordnung dort endlich und stetig bleiben, und z mit den $n-1$ ersten Ableitungen in den Punkten $x = a$ und b verschwindet, wenn ferner z auf den bei (8.) *genannten Theilstrecken η_1 bis η_λ gleich Null ist, aber nicht auf der ganzen Strecke a bis b verschwindet, behält das Integral N1* (18.) *immer das Vorzeichen von* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\,\partial y^{(n)}}$.

Bei allen diesen Scharen von Nachbarcurven $y+\varepsilon z$ von y, wo ε eine in der Nähe von Null variirende reelle Grösse ist, wird das Integral N1 (1.) ein Maximum bezüglich Minimum nach dem Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}}$.

3.

Verallgemeinerung des Resultates aus No. 2.

Die Function z von x war auf den Theilstrecken η_1 bis η_λ No. 2 (8.) gleich Null gesetzt. Die Schar der Nachbarcurven zu der durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrales No. 1 (1.) ermittelten Curve y, die durch $y+\varepsilon z$ gegeben wird, fällt daher auf den Theilstrecken η_1 bis η_λ mit y zusammen. Von dem erlangten Resultate aus kann man zu einer allgemeineren Schar von Nachbarcurven von y übergehen, welche den gestellten Forderungen genügen.

An Stelle von z wird jetzt gesetzt

$$(1.)\qquad \begin{cases} z+\varepsilon Z, \\ Z = (x-a)^n (x-b)^n\, \omega(x,\varepsilon), \end{cases}$$

wo

$$(2.)\qquad \omega(x,\varepsilon),\quad \frac{d^r\omega(x,\varepsilon)}{dx^r} \qquad (r=1,\dots,n)$$

für x von a bis b und das in der Nähe von Null variirende ε reelle endliche und stetige Functionen von x und ε sind. Wenn jede dieser Functionen durch $\varphi(x,\varepsilon)$ bezeichnet wird, so soll dieselbe Eigenschaft haben

$$(3.)\qquad \frac{d\varphi}{d\varepsilon},\quad \frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}.$$

Es ergiebt sich, dass die erste Variation des Integrales N1 (1.) für $\varepsilon=0$ denselben Ausdruck hat wie vorhin, also verschwindet, und dass vermöge der Differentialgleichung N1 (3.), und weil Z mit seinen Ableitungen nach x bis zur $(n-1)$-ten Ordnung für $x=a$ und b verschwindet, die zweite Variation für $\varepsilon=0$ wieder der vorige Ausdruck N1 (7.) ist.

Wenn also die in N2 (nach (3.)) angegebene Voraussetzung erfüllt ist, so wird das Integral N1 (1.) ein Maximum bezüglich Minimum (nach dem Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}}$) bei dem Uebergange von der durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrales ermittelten Curve y zu den unendlich benachbarten Curven, welche y mit den $n-1$ ersten Ableitungen

in den Endpunkten ungeändert lassen, *diese Curven im allgemeinen genommen bei den Nachbarcurven der gewöhnlich betrachteten Art.*

Zweite Abtheilung.

4.

Die isometrischen Aufgaben.

Bei diesen Aufgaben soll das Integral *N1* (1.)

$$(1.)\qquad \int_a^b f(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})\, dx$$

beim Uebergange von einer Curve y zu den unendlich benachbarten Curven ein Maximum bezüglich Minimum werden, während der Werth eines anderen Integrales

$$(2.)\qquad \int_a^b F(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(m)})\, dx$$

gegeben ist, worin F eine reelle Function von $x, y, \ldots, y^{(m)}$. In Bezug auf dieses Integral (2.), worin $m \leqq n$ ist, soll hier nicht verlangt werden, dass dasselbe beim Uebergange von der Curve y zu den unendlich benachbarten Curven constant bleibt. Es soll vielmehr hier die weniger fordernde Bedingung gemacht werden, wenn ε die reelle Grösse in der Nähe von Null ist, mittelst deren dieser Uebergang vorgenommen wird (*N1*, *N3*), dass die Aenderung des Integrales (2.) im Verhältniss zu ε mit unendlich klein werdendem ε unendlich klein wird.

Für y wird $y + \varepsilon z$ (*N1* bei (1.)) gesetzt. Der Differentialausdruck *N1* (3.)

$$(3.)\qquad f'(y) - \frac{d}{dx} f'(y^{(1)}) + \frac{d^2}{dx^2} f'(y^2) - \cdots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f'(y^{(n)})$$

sei durch Q, der Differentialausdruck, worin $\frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} = F'(y^{(r)})$ gesetzt ist,

$$(4.)\qquad F'(y) - \frac{d}{dx} F'(y^{(1)}) + \frac{d^2}{dx^2} F'(y^{(2)}) - \cdots (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F'(y^{(m)})$$

durch S bezeichnet. Da die Werthe von z und seinen $n-1$ ersten Ableitungen in $x = a$ und b verschwinden, wird die erste Variation von (1.) für $\varepsilon = 0$

$$(5.)\qquad \int_a^b z\, Q\, dx$$

und die erste Variation von (2.) für $\varepsilon = 0$

$$(6.)\qquad \int_a^b z\, S\, dx.$$

Damit letzteres Integral verschwindet, wird nach *Cauchy* (siehe Cours d'Analyse von *Duhamel* oder Cours de Calcul diff. et int. von *Serret*)

$$(7.)\qquad z S = \varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

gesetzt und

$$(8.)\qquad \varphi(x) = (x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\, w$$

genommen. Hieraus geht

$$(9.)\qquad z = \frac{\varphi'(x)}{S}$$

hervor. Dieses in (5.) eingesetzt, ergiebt

$$(10.)\qquad \int_a^b \varphi'(x)\frac{Q}{S}\, dx = -\int_a^b \varphi(x)\frac{d}{dx}\frac{Q}{S}\, dx.$$

Da w beliebig, so folgt

$$(11.)\qquad \frac{d}{dx}\frac{Q}{S} = 0$$

$$(12.)\qquad \frac{Q}{S} = c,$$

wo c eine Constante. Aus der Differentialgleichung

$$(13.)\qquad Q - cS = 0,$$

die von der $2n$-ten Ordnung ist, wird durch Integration y als Function von x, c und $2n$ anderen Constanten, die für $x = a$ bis b reell ist, ermittelt. Die Constanten sind durch die gegebenen Werthe von y und seinen $n-1$ ersten Ableitungen in $x = a$ und b und durch den gegebenen Werth des Integrales (2.) zu bestimmen.

Alsdann werden in Bezug auf die Function y und die Functionen

$$f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}),\ \frac{\partial f}{\partial y^{(p)}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(p)}\partial y^{(q)}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(n)}\partial y^{(n)}}$$

dieselben Voraussetzungen wie in №2 *(nach* (3.)*) gemacht. In Bezug auf die Functionen* $F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$, $\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}$ *werden die Voraussetzungen aus* №2 *bei* (4.) (5.) (6.) *gemacht.*

Ferner soll der Differentialausdruck S (4.) in dem in N2 (nach (3.)) bezeichneten Streifen T eine einwerthige und stetige analytische Function von x sein, die nicht identisch verschwindet.

Dann ist S auf der Strecke x von a bis b in einer endlichen Anzahl von Punkten gleich Null. Diese Punkte seien ζ_1 bis ζ_μ. Es werden auf der Strecke a bis b auseinanderliegende Theilstrecken θ ausgenommen, von denen jede nur einen Punkt ζ enthält, dieselben seien

$$(14.)\qquad \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\mu.$$

Nun sei w in (8.) auf der Strecke x von a bis b eine beliebige endliche und stetige reelle Function, deren Ableitungen bis zur $(2n+1)$-ten Ordnung dort ebenfalls endlich und stetig sind, welche auf den Theilstrecken η_1 bis η_λ ($N2$ (8.)) und auf den vorhin genannten Theilstrecken θ_1 bis θ_μ gleich Null ist, aber nicht allenthalben auf der Strecke a bis b verschwindet. (Eine solche Function ist mittelst der Functionen $N2$ (9.), worin $2n+2$ statt $2n+1$, $2n+1$ statt $2n$ gesetzt wird, zu bilden).

Da $\varphi(x)$ (8.) nicht allenthalben von $x = a$ bis b constant gleich Null ist, so verschwindet $\varphi'(x)$ auch nicht allenthalben.

Der Ausdruck (9.) für z ist dann eine Function, welche mit den Ableitungen bis zur $2n$-ten Ordnung auf der Strecke x von a bis b endlich und stetig ist, für $x = a$ und b mit den Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten Ordnung verschwindet, auf den Theilstrecken η_1 bis η_λ ($N2$ (8.)) und θ_1 bis θ_μ (14.) gleich Null ist, aber nicht allenthalben von a bis b verschwindet.

Die erste Variation (6.) des Integrales (2.) ist für $\varepsilon = 0$ gleich Null vermöge des Ausdruckes (9.) für z.

Die erste Variation (5.) des Integrales (1.) ist für $\varepsilon = 0$ gleich Null, da aus (13.) folgt

$$(15.)\qquad \int_a^b z\,Q\,dx - c\int_a^b z\,S\,dx = 0.$$

Da die erste Variation des Integrales (2.) für $\varepsilon = 0$ verschwindet, so ist die für dieses Integral gestellte Forderung erfüllt. Da die erste Variation des Integrales (1.) für $\varepsilon = 0$ verschwindet, so handelt es sich nunmehr um die zweite Variation dieses Integrales. Diese Variation wird vermöge der gemachten Voraussetzung und der vorhin angegebenen Eigenschaften von z wie in $N2$ behandelt und das Resultat ist dasselbe wie in $N2$.

bezüglich Minimum ist und die Aenderung des Integrales *N4* (2.) durch ε dividirt unendlich klein wird.

Dritte Abtheilung.

6.

Beispiele zu der ersten Abtheilung.

I. Kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.

Das Integral *N1* (1.) ist

$$(1.) \qquad \int_a^b \sqrt{1+(y^{(1)})^2}\,dx.$$

$$(2.) \qquad f=\sqrt{1+(y^{(1)})^2},\ f'(y)=0,\ f'(y^{(1)})=\frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}.$$

Die Differentialgleichung *N 1* (3.)

$$(3.) \qquad f'(y)-\frac{d}{dx}f'(y^{(1)})=0$$

giebt $y^{(1)}=\text{const.}$ $y=c_1x+c_2$. Für $x=a$, $y=\alpha$ und $x=b$, $y=\beta$.

$$(4.) \qquad y-a=\frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a).$$

$$(5.) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y^{(1)}}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(1)}}=\frac{1}{(1+(y^{(1)})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Voraussetzung aus *N2* (nach (3.)) in Bezug auf y und die Ausdrücke (2.), (5.) ist erfüllt. Das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(1)}}$ ist positiv, also ist ein Minimum vorhanden.

II. Meridiancurve einer Rotationsfläche von kleinstem Oberflächeninhalt.

Das Integral *N1* (1.) ist, abgesehen von dem Factor 2π, wenn die x-Axe zur Rotationsaxe und y positiv genommen wird,

$$(6.) \qquad \int_a^b y\sqrt{1+(y^{(1)})^2}\,dx.$$

$$(7.) \qquad f=y\sqrt{1+(y^{(1)})^2},\ f'(y)=\sqrt{1+(y^{(1)})^2},\ f'(y^{(1)})=\frac{y\,y^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}.$$

Die Differentialgleichung *N1* (3.)

$$(8.) \qquad f'(y)-\frac{d}{dx}f'(y^{(1)})=0$$

hat zum ersten Integrale

$$(9.)\qquad f - f'(y^{(1)})\, y^{(1)} = c_1$$

also

$$(10.)\qquad \frac{y}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}} = c_1.$$

Hieraus

$$(11.)\qquad y = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x-c_2}{c_1}} + e^{-\frac{x-c_2}{c_1}}\right).$$

Durch Verschiebung des Ursprungs des Coordinatensystems in der x-Axe wird aus (11.)

$$(12.)\qquad y = \frac{c_1}{2}\left(e^{\frac{x}{c_1}} + e^{-\frac{x}{c_1}}\right).$$

Die Curve (12.) wird dem Integrale (6.) zu Grunde gelegt, c_1 ist positiv, da y positiv sein soll, die Endpunkte von y in $x = a$ und b sollen auf der Kettenlinie (12.) liegen.

$$(13.)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y^{(1)}} = \frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\, \partial y^{(1)}} = \frac{y}{(1+(y^{(1)})^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Voraussetzung aus $N2$ (nach (3.)) in Bezug auf y und die Ausdrücke (7.) und (13.) ist erfüllt. Das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\, \partial y^{(1)}}$ ist positiv, also liegt ein Minimum vor.

III. Brachistochrone.

Die positive y-Axe in der Richtung der Schwere, g die Schwere auf die Masseneinheit bezogen, v die Geschwindigkeit des auf der Curve sich bewegenden Massenpunktes. Bei $x = a = 0$ sei $y = 0$, bei $x = b$ $y = \beta$.

$$(14.)\qquad \frac{v^2}{2} = gy + \text{const.}$$

$$(15.)\qquad \frac{v^2}{2} = g(y+k).$$

Hier sei die Constante $k > 0$. Das Integral $N1$ (1.), welches mit $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ multiplicirt die während der Bewegung verflossene Zeit ausdrückt, ist

$$(16.)\qquad \int_0^b \sqrt{\frac{1+(y^{(1)})^2}{y+k}}\, dx.$$

$$(17.)\qquad f = \sqrt{\frac{1+(y^{(1)})^2}{y+k}},\quad f'(y) = -\frac{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}{2(y+k)^{\frac{3}{2}}},\quad f'(y^{(1)}) = \frac{y^{(1)}}{\sqrt{(y+k)(1+(y^{(1)})^2)}}$$

Die Differentialgleichung N 1 (3.)

$$(18.)\qquad f'(y)-\frac{d}{dx}f'(y^{(1)}) = 0$$

hat als erstes Integral

$$(19.)\qquad f-f'(y^{(1)})y^{(1)} = c_1$$

also

$$(20.)\qquad (y+k)(1+(y^{(1)})^2) = \frac{1}{c_1^2} = 2R.$$

Hieraus

$$(21.)\qquad (y^{(1)})^2 = \frac{2R-(y+k)}{y+k},$$

$$(22.)\qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R-(y+k)}{y+k}}.$$

Die Differentialgleichung (22.) und daher (20.) wird befriedigt durch die Coordinaten der Cykloide

$$(23.)\qquad x+h = R(\theta-\sin\theta),$$

$$(24.)\qquad y+k = R(1-\cos\theta).$$

Für den Winkel θ sei das Intervall θ_0 bis θ_1 genommen, wo

$$(25.)\qquad 0<\theta_0<\theta_1<2\pi.$$

Bei gegebenem positivem Werthe R und beliebig angenommenem Werthe θ_0 wird k aus der Gleichung

$$(26.)\qquad k = R(1-\cos\theta_0)$$

bestimmt und h aus der Gleichung

$$(27.)\qquad h = R(\theta_0-\sin\theta_0).$$

Dann sei für θ_1

$$(28.)\qquad b+h = R(\theta_1-\sin\theta_1),$$

$$(29.)\qquad \beta+k = R(1-\cos\theta_1).$$

x ist eine einwerthige und stetige analytische Function von θ, $\frac{dx}{d\theta} = R(1-\cos\theta)$ verschwindet in dem Intervalle θ_0 bis θ_1 nicht. Daraus folgt für θ als Function von x, dass es in der Constructionsebene der complexen Variablen x einen Streifen T giebt, innerhalb dessen die Strecke $x = 0$ bis b liegt, in welchem θ eine einwerthige und stetige analytische Function von x ist. In demselben Streifen ist dann auch y eine einwerthige und stetige analy-

tische Function von x. $y+k$ ist bei θ_0 bis θ_1, daher bei $x=0$ bis $x=b$ von Null verschieden und bleibt demnach innerhalb eines solchen Streifens T von Null verschieden. Es ist

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}{(y+k)^{\frac{5}{2}}}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y^{(1)}} = -\dfrac{y_1}{2(y+k)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\,\partial y^{(1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{y+k}\,(1+(y^{(1)})^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Die Voraussetzung aus *N 2* (nach (3.)) in Bezug auf y und die Ausdrücke (17.) und (30.) ist erfüllt. Das Vorzeichen von $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(1)}}$ ist positiv, also ist ein Minimum vorhanden. —

Auf der Cykloide, (23.) (24.) mit den Relationen (26.) bis (29.) hat der Punkt $\theta=0$ die Coordinaten $x=-h$, $y=-k$. Wenn in diesem Punkte $v=0$ ist, so folgt aus Gleichung (14.) die Gleichung (15.), also der Massenpunkt erlangt in $x=0$, $y=0$ die Geschwindigkeit, die aus der Gleichung (15.), welche hier zu Grunde gelegt ist, hervorgeht. Die Nachbarcurven haben die Punkte θ_0 oder $x=0$, $y=0$ und θ_1 oder $x=b$, $y=\beta$ mit der Cykloide gemeinsam. Damit in beiden Punkten auch die Tangenten der Nachbarcurven mit denen der Cykloide übereinstimmen, wird, da hier n aus *N1* (1.) gleich 1 ist, s (*N1*) und Z(*N3*), welches in $x=a$ und b mit den $n-1$ ersten Ableitungen verschwindet, so gewählt, dass in $x=a$ (hier $x=0$) und $x=b$ auch noch die n-te Ableitung verschwindet. Wenn nun der Massenpunkt mit der Anfangsgeschwindigkeit Null sich auf der Cykloide von dem Punkte $\theta=0$ bis $\theta=\theta_0$ bewegt, alsdann auf eine Nachbarcurve übergeht und in dem Punkte $\theta=\theta_1$ wieder auf die Cykloide kommt, so ist dieses der hier behandelte Fall.

7.

Beispiele zu der zweiten Abtheilung.

I. Meridiancurve von gegebener Länge bei einer Rotationsfläche von kleinstem Oberflächeninhalt.

Das Integral *N 4* (1.) ist, abgesehen von dem Factor 2π, wenn die x-Axe zur Rotationsaxe und y positiv genommen wird,

$$(1.)\qquad \int_a^b y\sqrt{1+(y^{(1)})^2}\,dx,$$

das Integral $N\,4$ (2.)

(2.) $$\int_a^b \sqrt{1+(y^{(1)})^2}\,dx.$$

Es ist

(3.) $$f = y\sqrt{1+(y^{(1)})^2},\quad f'(y) = \sqrt{1+(y^{(1)})^2},\quad f'(y^{(1)}) = \frac{yy^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}};$$

(4.) $$F = \sqrt{1+(y^{(1)})^2},\quad F'(y) = 0,\quad F'(y^{(1)}) = \frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}.$$

Die Differentialgleichung $N4$ (13.)

(5.) $$Q - c\,S = 0$$

hat zum ersten Integral

(6.) $$f - f'(y^{(1)})\,y^{(1)} - c\,(F - F'(y^{(1)})\,y^{(1)}) = k_1$$

also

(7.) $$\frac{y-c}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}} = k_1.$$

Hieraus

(8.) $$y - c = \frac{k_1}{2}\left(e^{\frac{x-k_2}{k_1}} + e^{-\frac{x-k_2}{k_1}}\right).$$

Durch Verschiebung des Ursprunges des Coordinatensystems in der x-Axe erhält man

(9.) $$y - c = \frac{k_1}{2}\left(e^{\frac{x}{k_1}} + e^{-\frac{x}{k_1}}\right).$$

Die Curve (9.) wird den Integralen (1.) und (2.) zu Grunde gelegt, y positiv. Die Punkte $x = a$ und b seien so, dass auf der Kettenlinie, $k_1 > 0$ oder $k_1 < 0$,

(10.) $$Y = \frac{k_1}{2}\left(e^{\frac{x}{k_1}} + e^{-\frac{x}{k_1}}\right)$$

zwischen $x = a$ und b die gegebene Länge der Curve vorhanden ist. Die Endpunkte sollen alsdann auf der Curve (9.) liegen.

(11.) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y^{(1)}} = \frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(1)}} = \frac{y}{(1+(y^{(1)})^2)^{\frac{3}{2}}},$$

(12.) $$S = -\frac{d}{dx}\frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}.$$

Die Voraussetzung aus $N4$ in Bezug auf y und die Ausdrücke (3.), (4.), (11.), (12.) ist erfüllt; S ist nicht identisch Null, weil sonst $y^{(1)}$ constant wäre. Das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\partial y^{(1)}}$ ist positiv, es ist (s. $N5$) ein Minimum vorhanden.

$$(13.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y^{(1)}}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(1)}\,\partial y^{(1)}}=\frac{1}{(1+(y^{(1)})^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher wird das Integral (2.) gleichzeitig ein Minimum, wenn s gemäss der Behandlungsweise des Integrales (2.) nach $N2$ ausser auf den Theilstrecken $N2$ (8.) auf analogen Theilstrecken Null ist.

II. Meridiancurve kleinster Länge bei einer Rotationsfläche über gegebenem Volumen.

Das Integral $N4$ (1.) ist

$$(14.)\qquad \int_a^b \sqrt{1+(y^{(1)})^2}\,dx.$$

Das Integral $N4$ (2.) ist, abgesehen von dem Factor π, wenn die x-Axe zur Rotationsaxe genommen wird,

$$(15.)\qquad \int_a^b y^2\,dx.$$

Es ist

$$(16.)\qquad f=\sqrt{1+(y^{(1)})^2},\quad f'(y)=0,\quad f'(y^{(1)})=\frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}};$$

$$(17.)\qquad F=y^2,\quad F'(y)=2y,\quad F'(y^{(1)})=0.$$

Die Differentialgleichung $N4$ (13.)

$$(18.)\qquad Q-cS=0$$

hat zum ersten Integral

$$(19.)\qquad f-f'(y^{(1)})\,y^{(1)}-c(F-F'(y^{(1)})\,y^{(1)})=k$$

also

$$(20.)\qquad \frac{1}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}-cy^2=k.$$

Hieraus

$$(21.)\qquad (y^{(1)})^2=\frac{1-(cy^2+k)^2}{(cy^2+k)^2},$$

$$(22.)\qquad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{1-(cy^2+k)^2}{(cy^2+k)^2}},$$

$$(23.)\qquad x=\int_\alpha^y \pm\sqrt{\frac{(cy^2+k)^2}{1-(cy^2+k)^2}}\,dy+a.$$

c und k sind reelle Constanten. y soll sich auf der Strecke α bis β, die

Null nicht enthält, bewegen, so dass $(cy^2+k)^2$ nicht verschwindet und kleiner als 1 ist; das Quadratwurzelzeichen ist so, dass die Grösse unter dem Integralzeichen positiv ausfällt. x ist auf der Strecke y von α bis β und in der Nähe derselben eine einwerthige und stetige analytische Function von y, die für $y=\alpha$ gleich a, für $y=\beta$ gleich b wird. Da $\frac{dx}{dy}$ dort nicht verschwindet, so ist die umgekehrte Function y in einem Streifen der complexen Variablen x, der die Strecke x von a bis b im Innern enthält, eine einwerthige und stetige analytische Function von x, welche für reelle x reell ist. Das Volumen des Rotationskörpers zwischen den Ebenen $x=a$ und $x=b$ sei gegeben.

$$(24.)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y^{(1)}}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\,\partial y^{(1)}}=\frac{1}{(1+(y^{(1)})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(25.)\qquad S=2y.$$

Die Voraussetzung aus $N\,4$ in Bezug auf y und die Ausdrücke (16.), (17.), (24.), (25.) ist erfüllt. S ist nirgends Null, daher kommen die Ausnahmestellen θ $N\,4$ (14.) hier nicht vor. Das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\,\partial y^{(1)}}$ ist positiv. Es ist ein Minimum vorhanden, wenn die Scharen der Nachbarcurven von y aus $N\,5$ eintreten.

III. Meridiancurve einer Rotationsfläche von kleinstem Oberflächeninhalt über gegebenem Volumen.

Das Integral $N4$ (1.) ist, wenn die x-Axe zur Rotationsaxe und y positiv genommen wird, abgesehen von dem Factor 2π,

$$(26.)\qquad \int_a^b y\sqrt{1+(y^{(1)})^2}\,dx.$$

Das Integral $N4$ (2.), abgesehen von dem Factor π, ist

$$(27.)\qquad \int_a^b y^2\,dx.$$

Es ist

$$(28.)\quad f=y\sqrt{1+(y^{(1)})^2},\ f'(y)=\sqrt{1+(y^{(1)})^2},\ f'(y^{(1)})=\frac{y\,y^{(1)}}{(1+(y^{(1)})^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$(29.)\qquad F=y^2,\ F'(y)=2y,\ F'(y^{(1)})=0.$$

Die Differentialgleichung $N4$ (13.)

$$(30.)\qquad Q-cS=0$$

hat zum ersten Integral

$$(31.)\qquad f-f'(y^{(1)})\,y^{(1)}-c(F-F'(y^{(1)})\,y^{(1)})=k$$

also

$$(32.)\qquad \frac{y}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}}-cy^2=k.$$

Hieraus

$$(33.)\qquad (y^{(1)})^2=\frac{y^2-(cy^2+k)^2}{(cy^2+k)^2},$$

$$(34.)\qquad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{y^2-(cy^2+k)^2}{(cy^2+k)^2}},$$

$$(35.)\qquad x=\int_\alpha^y \pm\sqrt{\frac{(cy^2+k)^2}{y^2-(cy^2+k)^2}}\,dy+a.$$

c und k sind reelle Constanten; y, welches positiv ist, soll sich auf der Strecke α bis β bewegen, so dass $(cy^2+k)^2$ nicht verschwindet und $y^2>(cy^2+k)^2$ ist. Das Quadratwurzelvorzeichen ist so, dass die Grösse unter dem Integralzeichen positiv ausfällt. x ist auf der Strecke y von α bis β und in der Nähe derselben eine einwerthige und stetige analytische Function von y, die für $y=\alpha$ gleich a für $y=\beta$ gleich b wird. $\frac{dx}{dy}$ verschwindet dort nicht, also ist die umgekehrte Function y in einem Streifen, der die Strecke x von a bis b im Innern enthält, eine einwerthige und stetige analytische Function von x, welche für reelle x reell ist. Das Volumen des Rotationskörpers zwischen den Ebenen $x=a$ und $x=b$ sei gegeben.

$$(36.)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y^{(1)}}=\frac{y^{(1)}}{\sqrt{1+(y^{(1)})^2}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\,\partial y^{(1)}}=\frac{y}{(1+(y^{(1)})^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$(37.)\qquad S=2y.$$

Die Voraussetzung aus *N4* in Bezug auf y und die Ausdrücke (28.), (29.), (36.), (37.) ist erfüllt. S verschwindet nirgends, daher kommen die Ausnahmestrecken θ *N4* (14.) nicht vor. Das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(1)}\,\partial y^{(1)}}$ ist positiv. Es ist (s. *N5*) ein Minimum vorhanden.

Bemerkungen zum *Riemann*schen Problem.

(Von den Herren *L. Schlesinger* in Klausenburg und *T. Brodén* in Lund.)

I.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn T. Brodén von Herrn L. Schlesinger.)

. . . . . . Die Verallgemeinerung des *Riemann*schen Problems der Theorie der linearen Differentialgleichungen, die Sie in Ihrem geschätzten Schreiben vom 24. d. M. formuliren und die darin besteht, dass die Bedingung, die n zu determinirenden Functionen mögen in den vorgeschriebenen Verzweigungspunkten nicht unbestimmt (oder, wie *Riemann* es ausdrückt, nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich) werden, fallen gelassen wird, giebt mir zu den folgenden Bemerkungen Veranlassung, die ich Ihnen auf Ihren Wunsch hiermit gern mittheile.

Dass *Riemann* das Problem gerade in der beschränkten Fassung formulirt, in welcher ich es auch in meinen auf diesen Gegenstand Bezug nehmenden Arbeiten behandle, scheint mir nicht allein darin seinen Grund zu haben, dass die Klasse von linearen Differentialgleichungen, auf die das Problem führt (die *Fuchs*sche), wie Sie es ausdrücken „in gewissen Hinsichten als die einfachste und am meisten zugängliche betrachtet werden kann", sondern vielmehr auch darin, *dass allein bei dieser Fassung des Problems von vornherein gesichert ist, dass die lineare Differentialgleichung, der die zu determinirenden Functionen genügen, rationale Coefficienten besitzt.*

Lässt man nämlich die Beschränkung, dass die n zu determinirenden

$a_1, \dots a_\sigma, a_{\sigma+1}$ allenthalben eindeutig, endlich, stetig sind, so hat man die eindeutigen Functionen

$$r_{00}, r_{10}, \dots, r_{n-1,0}$$

so zu wählen, dass sie ausser den $a_1, \dots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$ (wo sie auch wesentlich singuläre, d. h. Unbestimmtheitsstellen aufweisen können) nur noch eine endliche Anzahl von Polen $b_1, \dots, b_\varrho$ besitzen, und in diesen so unendlich werden, dass die $b_1, \dots, b_\varrho$ für die lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten, der die Ausdrücke (1.) genügen „ausserwesentlich singuläre Punkte" (im Sinne von Herrn *Fuchs, Crelles* Journal, Bd. 68, S. 378) liefern, also Punkte, in welchen die Ausdrücke (1.) selbst endlich bleiben. Die Bedingungen hierfür sind dieselben wie die, welche auf S. 164 ff. meiner Arbeit (*Crelles* Journal, Bd. 123) für das Verhalten der daselbst mit

$$\frac{h_0(x)}{g(x)}, \frac{h_1(x)}{g(x)}, \dots, \frac{h_{n-1}(x)}{g(x)}$$

bezeichneten rationalen Functionen in der Umgebung der Stellen b_x angegeben sind.

Damit ist also die Lösung des von Ihnen verallgemeinerten *Riemann*schen Problems auf die Lösung des entsprechenden Problems in seiner ursprünglichen Fassung zurückgeführt.

Verlangt man insbesondere, dass die Coefficienten der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung, der die Lösungen (1.) des in Ihrem Sinne verallgemeinerten *Riemann*schen Problems genügen, *rationale* Functionen von x seien, so hat man die eindeutigen Functionen $r_{00}, r_{10}, \dots, r_{n-1,0}$ in (1.) noch so einzurichten, dass sich aus dem Gleichungssysteme (D_1), (D_2) meiner Arbeit (*Crelles* Journal, Bd. 124, S. 50) die $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ als rationale Functionen von x ergeben, wenn $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ die Coefficienten der aus dem entsprechenden *Riemann*schen Probleme entspringenden Differentialgleichung der *Fuchs*schen Klasse bedeuten.

Sie sehen also, dass das von Ihnen verallgemeinerte *Riemann*sche Problem als gelöst zu betrachten ist, wenn die Lösung des entsprechenden *Riemann*schen Problems gesichert ist, also nach den Ergebnissen meiner Arbeiten stets, wenn die Substitutionen $A_1, \dots, A_\sigma$ die von mir sogenannten Convergenzbedingungen erfüllen.

Klausenburg, den 29. November 1901.

II.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn L. Schlesinger von Herrn T. Brodén.)

. . . . . . Die Lösung des in meinem vorigen Briefe besprochenen verallgemeinerten *Riemann*schen Problems, lässt sich also, wie Sie es ausdrücken, auf die Lösung des Problems in seiner ursprünglichen Fassung zurückführen. Die nähere Bedeutung dieser Reduction der allgemeineren Frage auf die speciellere hat man aber — wenn ich Ihre brieflichen Mittheilungen richtig aufgefasst habe — folgendermassen zu verstehen: Wenn man in irgend einem Falle (bei gewissen gegebenen a_i und A_i) n Functionen $s_1, \dots, s_n$ hat bestimmen können, welche den ursprünglichen *Riemann*schen Bedingungen genügen, so sind damit alle Systeme von n Functionen bestimmt, welche den Forderungen des verallgemeinerten Problems entsprechen; alle solche Functionssysteme lassen sich nämlich durch Ausdrücke der Form (1.) Ihres Briefes darstellen, wo die eindeutigen Functionen $r_{k,0}$ gewisse völlig bestimmte, von Ihnen näher angegebene Bedingungen erfüllen sollen. Und ähnliches gilt (wie ja schon aus der Stelle II, 1 p. 112, 113 Ihres bekannten Handbuches hervorgeht) auch, wenn man als „das verallgemeinerte Problem" das noch allgemeinere bezeichnet, welches Sie in Ihrem Schreiben formulirt und mit (B_1) markirt haben; dann sind aber die $r_{k,0}$ als beliebige eindeutige Functionen aufzufassen.

Hierzu kann ja noch Folgendes bemerkt werden. Wenn in irgend einem Falle das Problem (B_1) überhaupt lösbar ist, so giebt es unendlich viele Lösungen, d. h. unendlich viele Systeme von n Functionen der verlangten Art, und dieselben hängen zu zwei und zwei durch Relationen der genannten Form (1.) zusammen, oder — wie man es auch ausdrücken kann — den gegebenen a_i und A_i entspricht ein System von unendlich vielen nach Ihrer Definition (*Crelles* Journ. Bd. 124 pag. 48) „cogredienten" linearen homogenen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten. *A priori* liegt aber die Möglichkeit vor, dass in gewissen Fällen das Problem (B_1) überhaupt keine Lösungen besitzt. Und auch bei Lösbarkeit desselben ist es *a priori* denkbar, dass unter den zugehörigen Functionssystemen keine vorkommen, welche den *Riemann*schen Bedingungen genügen, oder was dasselbe ist, unter den zugehörigen Differentialgleichungen keine der *Fuchs*schen Klasse angehört. Die Frage, ob das *Riemann*sche Problem

immer lösbar ist, lässt sich also, wenn man so will, in die folgenden zwei Fragen auflösen: Erstens kann man fragen, ob das Problem (B_1) immer lösbar ist. Und zweitens:

(φ.) ***Enthält ein System von „cogredienten" linearen homogenen Differentialgleichungen mit einer endlichen Anzahl von Verzweigungsstellen*** (und mit eindeutigen Coefficienten) ***immer Gleichungen der Fuchsschen Klasse?***

Wenn gezeigt werden könnte, dass diese Frage zu verneinen ist, so wäre natürlich *eo ipso* gezeigt, dass *Riemanns* Problem nicht immer lösbar ist. Wenn dagegen die Frage zu bejahen ist, so folgt daraus noch nicht, dass *Riemanns* Problem immer Lösungen besitzt, so lange die ausnahmslose Lösbarkeit des Problems (B_1) nicht in strenger Weise dargethan ist. Aber die Bejahung von (φ.) würde involviren, dass die Lösung von (B_1) im strengsten Sinne auf die Lösung der ursprünglichen *Riemann*schen Aufgabe reducirbar wäre. Gegenwärtig weiss man ja nur, dass — zufolge Ihrer Untersuchungen — (φ.) in dem Falle zu bejahen ist, wo die „Convergenzbedingungen" erfüllt sind. — Die Frage (φ.) ist ja übrigens mit derjenigen gleichbedeutend, ob man in Ihren Gleichungen $(E_1.)$, $(E_2.)$, (*Crelle*s Journ. Bd. 124, p. 55) bei gegebenen eindeutigen Functionen $p_0, \dots, p_{n-1}$, welche zu einer Differentialgleichung der fraglichen Art als Coefficienten gehören, immer rationale Functionen $q_0, \dots, q_{n-1}$ von der für die Coefficienten einer Gleichung der *Fuchs*schen Klasse charakteristischen Form so bestimmen kann, dass $(E_1.)$, $(E_2.)$ ein System von eindeutigen Integralen erhalten.

Meine Beschäftigung mit diesen Dingen ist gewissermassen von mehr beiläufiger Natur gewesen. Aber es kommt mir vor, als ob die ausdrückliche Fixirung der (freilich sehr nahe liegenden) Frage (φ.) vielleicht nicht ohne Werth oder Interesse sein könnte. Und zwar hat ein ganz besonderer Umstand in sehr natürlicher Weise meine Gedanken in diese Richtung gelenkt. Bei Erwägungen über das *Riemann*sche Problem in dem Falle, wo die „Convergenzbedingungen" nicht erfüllt sind, wurde ich nämlich zu einer Bemerkung geführt, welche sich zunächst auf eine etwas allgemeinere, weniger verlangende Aufgabe bezieht (im wesentlichen die von mir vorher erwähnte). Es zeigte sich nämlich, dass die Frage nach der völlig ausnahmslosen Lösbarkeit dieser Aufgabe sich auf eine ungleich viel bescheidenere und wenigstens anscheinend einfachere Existenzfrage zurückführen lässt (und ich stehe im Begriff über diese Untersuchung an anderer Stelle eine

vorläufige Mittheilung zu veröffentlichen*). Inwieweit aber hiermit etwas für die ursprüngliche *Riemann*sche Aufgabe gewonnen sein kann, ist eine Frage, welche natürlich unmittelbar mit der Frage (φ.) zusammenhängt (sowie auch mit der allgemeineren Frage, wie sich die Verhältnisse innerhalb eines Systems „cogredienter" Differentialgleichungen der obengenannten Art in verschiedenen Hinsichten gestalten können). . . .

Lund, den 7. December 1901.

*) Dieselbe ist inzwischen erschienen: „Öfversigt" der Stockholmer Akad. 1902, p. 5—11.

Ueber Näherungswerthe und Kettenbrüche.

(Von Herrn *E. Netto* in Giessen.)

Durch den für die vorliegende Arbeit gewählten Titel soll neben der Charakterisirung ihres Inhalts zugleich auf eine ebenso benannte, im 115. Bande (1895) dieses Journals von Herrn *K. Th. Vahlen* veröffentlichte Arbeit hingewiesen werden. In dieser interessanten Skizze finden sich Untersuchungen, die im Folgenden fortgesetzt, erweitert und genauer begründet werden sollen. Es wird sich zeigen, dass die Kettenbruchentwickelungen, welche sich an eine *Farey*sche Reihe anknüpfen lassen, nach manchen Richtungen hin weiter gefasst werden können, als dies bisher geschehen ist, und dass dabei eine ganze Anzahl von beachtenswerthen Gesetzmässigkeiten zum Vorschein kommt.

Die Litteraturangaben sind von Herrn *Vahlen* bereits so genau und vollständig gemacht worden, dass ihnen nichts hinzuzufügen war.

§ 1.

Es sei β ein beliebiger positiver echter Bruch, dessen Kettenbruchentwickelung in gewöhnlicher Form bei positiven ganzzahligen Nennern durch

(1.) $$\beta = 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \cdots + 1/a_\nu$$

gegeben wird*). Wir setzen

---

*) Diese Schreibweise statt $\beta = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$ oder $\frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \frac{1}{a_3} \dotplus \cdots$ oder $\frac{1}{a_1} + \frac{|1}{a_2|} + \frac{|1}{a_3|} \cdots$ scheint mir empfehlenswerth.

$$(2.)\qquad \beta_\alpha = 1/a_{\alpha+1} + 1/a_{\alpha+2} + \cdots + 1/a_\nu \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu-1),$$

so dass

$$\beta = 1/a_1 + \beta_1 = 1/a_1 + 1/a_2 + \beta_2 = \cdots$$

ist, und dass alle $\beta_1, \beta_2, \ldots,$ gleichfalls positive echte Brüche sind.

Nun schreiben wir zwischen die beiden Anfangsbrüche

$$\frac{0}{1} = \frac{z_0}{n_0} \text{ und } \frac{1}{1} = \frac{z_1}{n_1},$$

vom zweiten anfangend und von *rechts nach links* gehend, die a_1 Brüche

$$(3.)\qquad \frac{1}{2} = \frac{z_2}{n_2},\quad \frac{1}{3} = \frac{z_3}{n_3}, \ldots,\quad \frac{1}{a_1} = \frac{z_{a_1}}{n_{a_1}},\quad \frac{1}{a_1+1} = \frac{z_{a_1+1}}{n_{a_1+1}}$$

hin, so dass die Reihe

$$(4.)\qquad \frac{0}{1},\ \frac{1}{a_1+1},\ \frac{1}{a_1}, \ldots,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}$$

entsteht. Es liegt dann β zwischen $\frac{1}{a_1}$ und $\frac{1}{a_1+1}$. Zwischen diese beiden Brüche schreiben wir weiter von $\frac{1}{a_1+1}$ anfangend und von *links nach rechts* gehend, die a_2 Brüche

$$(5.)\qquad \frac{2}{2a_1+1} = \frac{z_{a_1+2}}{n_{a_1+2}},\quad \frac{3}{3a_1+1} = \frac{z_{a_1+3}}{n_{a_1+3}}, \ldots,\quad \frac{a_2+1}{(a_2+1)\,a_1+1} = \frac{z_{a_1+a_2+1}}{n_{a_1+a_2+1}}$$

hin, zwischen deren beiden letzten der Bruch β liegt. Zwischen diese beiden schreiben wir weiter in derselben Art von *rechts nach links* gehend, a_3 Brüche hinein, deren Bildungsgesetz leicht zu überblicken sind. In (3.) sind nämlich die Glieder nach folgender Regel hergestellt; es ist

$$(6.)\quad \begin{cases} z_2 = z_0 + z_1,\quad z_3 = z_0 + z_2, \ldots,\quad z_{a_1} = z_0 + z_{a_1-1},\quad z_{a_1+1} = z_0 + z_{a_1}, \\ n_2 = n_0 + n_1,\quad n_3 = n_0 + n_2, \ldots,\quad n_{a_1} = n_0 + n_{a_1-1},\quad n_{a_1+1} = n_0 + n_{a_1}; \end{cases}$$

ähnlich gilt für die Glieder in (5.) die Bildungsregel

$$(6a.)\quad \begin{cases} z_{a_1+2} = z_{a_1} + z_{a_1+1},\quad z_{a_1+3} = z_{a_1} + z_{a_1+2}, \ldots,\quad z_{a_1+a_2+1} = z_{a_1} + z_{a_1+a_2}, \\ n_{a_1+2} = n_{a_1} + n_{a_1+1},\quad n_{a_1+3} = n_{a_1} + n_{a_1+2}, \ldots,\quad n_{a_1+a_2+1} = n_{a_1} + n_{a_1+a_2}; \end{cases}$$

und die hierdurch ersichtliche Bildung soll weiter gelten. Man hat das Gleiche auch in der Form

$$z_{\alpha+1} = \alpha z_0 + z_1,\qquad n_{\alpha+1} = \alpha n_0 + n_1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, a_1)$$

$$z_{a_1+\gamma+1} = \gamma z_{a_1} + z_{a_1+1},\qquad n_{a_1+\gamma+1} = \gamma n_{a_1} + n_{a_1+1} \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, a_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder auch in der Form

$$
(7.)\quad \begin{cases}
z_\alpha = \alpha z_0 + 1, \quad n_\alpha = \alpha n_0 + 0 & (\alpha = 1, 2, \ldots, a_1), \\
z_{a_1+\gamma} = \gamma z_{a_1} + z_0, \quad n_{a_1+\gamma} = \gamma n_{a_1} + n_0 & (\gamma = 1, 2, \ldots, a_2), \\
z_{a_1+a_2+\delta} = \delta z_{a_2} + z_{a_1}, \quad n_{a_1+a_2+\delta} = \delta n_{a_2} + n_{a_1} & (\delta = 1, 2, \ldots, a_3), \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots
\end{cases}
$$

Aus dem letzten Schema ersieht man, dass

$$\frac{z_{a_1}}{n_{a_1}} = 1/a_1, \quad \frac{z_{a_2+a_2}}{n_{a_2+a_2}} = 1/a_1 + 1/a_2, \quad \frac{z_{a_1+a_2+a_3}}{n_{a_1+a_2+a_3}} = 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3, \ldots$$

wird.

Die hergestellte Reihe nennen wir die ***Fareysche Reihe für*** β und bezeichnen sie mit R. Sie endet bei dem Bruche β. Bei ihrer Herstellung wird eine gewisse Folge im Niederschreiben der einzelnen Brüche innegehalten; diese stimmt mit der schliesslichen *Anordnung* nicht überein. Die Folge des Niederschreibens wollen wir durch *Nummerirung* der Brüche kennzeichnen, indem wir jedem der Brüche diejenige *Nummer* beilegen, welche angiebt, als wievielter er niedergeschrieben wurde, falls $\frac{0}{1}$ die Nummer [0], dann $\frac{1}{1}$ die Nummer [1], $\frac{1}{2}$ die Nummer [2], u. s. f. erhält. — Es ist klar, dass die Brüche mit den Nummern

$$[a_1], \quad [a_1 + a_2], \quad [a_1 + a_2 + a_3], \ldots$$

die Näherungswerthe von (1.) bilden. — Nebeneinander in der fertigen Reihe stehende Brüche brauchen nicht in der Nummerirung benachbart zu sein.

Die Bildung der Reihe führt darauf, die ersten a_1 Glieder in eine *erste Serie* zusammenzufassen, die folgenden a_2 mit den Nummern von $[a_1 + 1]$ bis zu $[a_1 + a_2]$ in eine *zweite Serie* u. s. f. Die Serien gehen abwechselnd von rechts nach links und von links nach rechts; die ersten mögen *obere Serien* heissen; sie liegen rechts von β; die zweiten mögen *untere Serien* heissen; sie liegen links von β. Zwei obere und zwei untere Serien heissen *gleichgerichtet;* eine obere und eine untere heissen *ungleich gerichtet.* Hat eine Serie mindestens drei Glieder, so unterscheiden wir ihr *Anfangsglied,* welches die niedrigste Nummer der Serie hat, ihre *Mittelglieder* und ihr *Endglied* oder *Schlussglied.* Es ist möglich, dass eine Serie nur aus einem Gliede besteht.

Aus (6.) und (6ᵃ.) geht hervor, dass der Zähler (Nenner) jedes Gliedes durch Summirung der Zähler (Nenner) des in der Nummerirung voraufgehenden derselben und des Schlussgliedes der diesem vorhergehenden Serie gebildet wird. Wir nennen diese Bildung eines neuen Bruches *Composition*.

Als Beispiel nehmen wir $\beta = \frac{31}{100}$; das giebt

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{10},\ \frac{4}{13},\ \frac{13}{42},\ \frac{22}{71},\ \frac{31}{100},\ \frac{9}{29},\ \frac{5}{16},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1};$$

[0], [4], [5], [6], [7], [10], [11], [12], [9], [8], [3], [2], [1].

Die Zahlen in der eckigen Klammer geben die Nummern an. Die Serien sind [1] bis [3]; dann [4] bis [7]; weiter [8], [9] und endlich [10] bis [12]. Die Werthe von [10], [11], [12] z. B. werden gebildet durch Summirung von Zähler und Nenner von [7] und [9]; [10] und [9]; [11] und [9].

Ferner möge das Beispiel für $\beta = \frac{18}{43}$ das Auftreten von eingliedrigen Serien zeigen:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{18}{43},\ \frac{13}{31},\ \frac{8}{19},\ \frac{3}{7},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1};$$

[0], [3], [4], [6], [9], [8], [7], [5], [2], [1].

Hier sind [5] und [6] für sich als Serien anzusehen.

Die Nummer von β wird hiernach gleich $(a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu)$.

Aus (6.) und (6ᵃ.) geht ebenso hervor, dass jeder Bruch der Reihe $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ aus dem benachbarten mit niedrigerer Nummer $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ und einem früheren Bruche $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$, der bei der allmähligen Herstellung zuerst zu $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ benachbart war, durch das Compositions-Gesetz

$$(8.)\qquad z_\alpha = z_\beta + z_\gamma, \quad n_\alpha = n_\beta + n_\gamma$$

hergestellt werden kann. Die Beispiele geben Belege hierfür.

Zwischen zwei benachbarten Brüchen und zwischen zwei solchen, die einmal bei der Herstellung benachbart waren $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}, \frac{z_\beta}{n_\beta}$, besteht die *Kettenbruch-Relation*

$$(9.)\qquad z_\alpha n_\beta - z_\beta n_\alpha = \pm 1 \qquad (\alpha > \beta).$$

In der That wird nach (8.)

$$z_\alpha n_\beta - z_\beta n_\alpha = (z_\beta + z_\gamma) n_\beta - z_\beta (n_\beta + n_\gamma) = z_\gamma n_\beta - z_\beta n_\gamma,$$

wo auch $\frac{z_\beta}{n_\beta}$, $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ benachbarte Brüche sind oder waren. Dadurch ist die Frage auf die gleiche bei niedrigeren Indices reducirt. Da ferner

$$z_1 n_0 - z_0 n_1 = 1, \quad z_2 n_1 - z_1 n_2 = -1$$

ist, so folgt der Satz (9.) allgemein.

Durchläuft man unsere Reihe von links nach rechts von $\frac{0}{1}$ bis zu $\frac{1}{1}$, so wächst der Werth der Brüche beständig; dagegen wachsen alle Zähler (Nenner) nur bis zu β und nehmen von da ab bis zu $\frac{1}{1}$ wieder ab.

Durch die beiden letzten Eigenschaften und durch das vorgelegte β ist die Reihe eindeutig bestimmt, derart, dass jede Reihe von Brüchen, welche β enthält und diese beiden Eigenschaften besitzt, mit unserer Reihe übereinstimmt.

Geht man in der That von $\beta = Z : N$ aus, so giebt es, wie aus der Theorie der Kettenbrüche sofort folgt, nur zwei Brüche $Z_1 : N_1$ und $Z_1' : N_1'$ mit $Z_1, Z_1' < Z$; $N_1, N_1' < N$, bei denen

$$Z N_1 - Z_1 N = +1, \quad Z N_1' - Z_1' N = -1$$

wird. Diese Brüche müssen unmittelbar links bezw. rechts von β stehen, wobei der dem Werthe nach grössere Bruch rechts seinen Platz findet,

$$\frac{Z_1}{N_1}, \quad \beta = \frac{Z}{N}, \quad \frac{Z_1'}{N_1'}.$$

Ebenso giebt es für $Z_1 : N_1$ nur einen Bruch $Z_2 : N_2$ mit kleinerem Zähler und Nenner, für den gleichzeitig

$$Z_1 N_2 - Z_2 N_1 = +1$$

wird; dieser muss links von $Z_1 : N_1$ treten, u. s. f. Es ist also die Reihe eindeutig bestimmt.

Wir suchen jetzt alle diejenigen Brüche der Reihe auf, welche zu einem gegebenen $\frac{z_\alpha}{n_\alpha} = \frac{a}{b}$ in der Kettenbruch-Relation (9.) stehen. Dazu reicht es aus, die höher nummerirten festzustellen.

Es sei $\frac{z_\beta}{n_\beta} = \frac{c}{d}$ das Schlussglied der Serie, welche derjenigen voraufgeht, die $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ enthält. Dann finden die weiteren Bildungen innerhalb der Serie von $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ durch die Compositionen

$$\frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{a+2c}{b+2d}, \quad \frac{a+3c}{b+3d}, \ldots, \quad \frac{a+qc}{b+qd}$$

statt. Nun ist aber

$$(a+\varkappa c)\,b - a\,(b+\varkappa d) = \varkappa\,(bc-ad) = \pm\,\varkappa,$$

also gilt die Kettenbruch-Relation nur für das *nächste* Glied der Serie ($\varkappa = 1$) und nicht für die weiteren. Die folgende Serie hat dann nur Glieder, die aus $\frac{a}{b}$ und dem Schlussgliede $\frac{a+qc}{b+qd}$ durch die Compositionen

$$\frac{2a+qc}{2b+qd}, \quad \frac{3a+qc}{3b+qd}, \ldots$$

abgeleitet werden; folglich gilt die Kettenbruch-Relation auch für diese nicht. Eine Ausnahme findet nur statt, wenn $q = 1$ ist, d. h. wenn $\frac{a}{b}$ ein Serien-Schlussglied wird. Dann findet sich die Kettenbruch-Relation zwischen $\frac{a}{b}$ und allen Gliedern der nächstfolgenden Kette.

Daraus erkennt man: *jedes Glied steht in Kettenbruch-Relation zu seinen beiden rechts und links benachbarten Gliedern; zum Schlussgliede der vorhergehenden Serie; und, — wenn es selbst das Endglied einer Serie ist, — zu allen Gliedern der nachfolgenden Serie.* Da die Grösse der Brüche steigt, wenn man die Reihe von links nach rechts durchläuft, so ist man über das Vorzeichen von $z_\alpha n_\beta - z_\beta n_\alpha$ bei zwei neben einander stehenden Brüchen $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}, \frac{z_\beta}{n_\beta}$ sofort orientirt. Eine Reihe von Brüchen, von denen jeder mit den beiden benachbarten in Kettenbruch-Relation steht, heisst eine *Farey*sche Reihe.

Sind also z. B.

$$\frac{z_\alpha}{n_\alpha}, \quad \frac{z_\beta}{n_\beta}, \quad \frac{z_\gamma}{n_\gamma}$$

drei in der angegebenen Reihenfolge nebeneinanderstehende Brüche, so ist

$$z_\alpha n_\beta - z_\beta n_\alpha = z_\beta n_\gamma - z_\gamma n_\beta,$$

$$(z_\alpha + z_\gamma)\,n_\beta = (n_\alpha + n_\gamma)\,z_\beta,$$

$$(10.) \qquad \frac{z_\beta}{n_\beta} = \frac{z_\alpha + z_\gamma}{n_\alpha + n_\gamma}.$$

Dies ist eine Ergänzung zu der Formel (8.), welche sich auf drei Brüche bezieht, die bei der Bildung der Reihe einmal auf einander folgende Nummern aufweisen. Die Relation (10.) charakterisirt die Composition der Brüche $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}, \frac{z}{n_\gamma}$ zu $\frac{z_\beta}{n_\beta}$.

§ 2.

Man kann zu derselben Reihe durch eine andere Methode gelangen. Wir bilden eine Kettenbruch-Entwickelung von β derart, dass bei jeder Division die dem wahren Quotienten benachbarte *höhere* ganze Zahl als Theilnenner genommen wird. Dabei erhalten wir etwa

$$(11.)\quad \begin{cases} \beta = 1/b_1 - 1/b_2 - \cdots - 1/b_\varrho \\ \quad = 1/b_1 - \beta_1' = 1/b_1 - 1/b_2 - \beta_2' = \cdots \end{cases} \qquad (0 < \beta_\lambda' < 1).$$

Da jedes β_λ' ein echter Bruch, und also $1:\beta_\lambda' > 1$ ist, so kann kein $b_{\lambda+1}$ gleich 1 werden. Die Bildung der einzelnen Kettenbruch-Näherungswerthe geschieht durch

$$(11^a.)\quad \frac{0}{1},\ \frac{1}{b_1},\ \frac{b_2}{b_1 b_2 - 1},\ \frac{b_2 b_3 - 1}{(b_1 b_2 - 1) b_3 - b_1}, \ldots$$

Nun schreiben wir zwischen die beiden Anfangsglieder

$$\frac{z_0}{n_0} = \frac{0}{1} \quad \text{und} \quad \frac{z_1}{n_1} = \frac{1}{1}$$

beim zweiten anfangend und von *rechts nach links* gehend $(b_1 - 1)$ Brüche

$$(12.)\quad \frac{z_2}{n_2} = \frac{1}{2},\ \frac{z_3}{n_3} = \frac{1}{3}, \ldots, \frac{z_{b_1}}{n_{b_1}} = \frac{1}{b_1}.$$

Weiter schreiben wir zwischen $\frac{z_{b_1-1}}{n_{b_1-1}}$ und $\frac{z_{b_1}}{n_{b_1}}$, wiederum von *rechts nach links gehend* eine Reihe von Gliedern hin, deren erstes aber, weil es mit $\frac{1}{b_1 - 1}$ zusammenfällt, unterdrückt werden soll. Rechnet man es gleichwohl mit, so handelt es sich um die b_2 Glieder

$$(13.)\quad \frac{1-0}{b_1 - 1},\ \frac{2-0}{2b_1 - 1},\ \frac{3-0}{3b_1 - 1}, \ldots, \frac{b_2 - 0}{b_2 b_1 - 1} = \frac{z_{b_1 + b_2 - 1}}{n_{b_1 + b_2 - 1}}.$$

Rechts von diesem letzten Gliede, also in der Gesammtanordnung rechts von den drei Gliedern $\frac{1}{0}, \frac{1}{b_1}, \frac{b_2}{b_2 b_1 - 1}$ finden nun b_3 Glieder ihren Platz, die auch von *rechts nach links hin* angeordnet werden, deren erstes mit

$$\frac{z_{b_1 + b_2 - 2}}{n_{b_1 + b_2 - 2}} = \frac{b_2 - 1}{(b_2 - 1) b_1 - 1}$$

zusammenfällt, und deren Bildung, wenn man

$$\frac{1}{b_1} = \frac{z_\beta}{n_\beta},\quad \frac{b_2}{b_2 b_1 - 1} = \frac{z_\alpha}{n_\alpha}$$

setzt, durch die Brüche

$$(14.)\qquad \frac{z_\alpha - z_\beta}{n_\alpha - n_\beta}, \frac{2z_\alpha - z_\beta}{2n_\alpha - n_\beta}, \frac{3z_\alpha - z_\beta}{3n_\alpha - n_\beta}, \dots, \frac{b_3 z_\alpha - z_\beta}{b_3 n_\alpha - n_\beta}$$

geliefert wird. In derselben Art fährt man fort, bis β erreicht ist; das muss eintreten, da die Endglieder von (12.), (13.), (14.) mit den Näherungswerthen (11ᵃ.) der Reihe nach übereinstimmen. Man sieht zugleich, dass dabei die links von β auftretenden Brüche der Reihe nach durch (11ᵃ.) gegeben sind, so dass ihre Anzahl durch die Zahl der zu (11.) gehörigen Theilnenner bestimmt ist. Ferner ist klar, dass bei dieser Anordnung die Zähler und die Nenner von beiden Seiten her bis zu β beständig zunehmen.

Die Uebereinstimmung dieser Reihe von Brüchen mit der in § 1 construirten folgt also nach den Schlussbetrachtungen jenes Paragraphen, sobald gezeigt ist, dass zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern unserer jetzigen Reihe die Kettenbruch-Relation herrscht. Dies soll in einem der nächsten Paragraphen geschehen; hier werde es als bewiesen angenommen.

Bei diesem Vorgehen ist es klar, dass die Anzahl der Brüche der Reihe insgesamt durch die Zahl

$$b_1 + (b_2 - 1) + (b_3 - 1) + \dots + (b_\varrho - 1)$$

gegeben wird.

Man kann die durch (12.) und (13.) angedeuteten Bildungen noch in einer anderen Art durchführen, die sich enger an die in § 1 benutzte anschliesst. Ist die Bildung einer Serie beendet, und ist $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ ihr Schlussglied, so tritt bei § 1 die nächste Serie zwischen $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ und den benachbarten Bruch der *einen* Seite; hier zwischen $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ und den benachbarten der *anderen* Seite. Im ersten Falle ist dieser benachbarte Bruch der letzte der voraufgehenden Serie; im zweiten Falle der dem $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ vorhergehende derselben Serie. Die Ordnung der neu zu bildenden Serie bewegt sich in beiden Fällen au $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ zu; im ersten Falle sind also die Serien ungleich gerichtet; im zweiten sind sie gleichgerichtet. Die Bildung der Brüche erfolgt in beiden Fällen auf dieselbe Art. Liegt die neue Serie zwischen $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ und $\frac{z_\delta}{n_\delta}$, so besteht sie aus Brüchen der Form

$$\frac{z_\delta + z_\gamma}{n_\delta + n_\gamma}, \frac{z_\delta + 2z_\gamma}{n_\delta + 2n_\gamma}, \frac{z_\delta + 3z_\gamma}{n_\delta + 3n_\gamma}, \dots .$$

Im ersten Falle werden so viele Brüche eingeschoben, wie der neue Theilnenner angiebt; im zweiten Falle ein Bruch weniger, wie dies ja oben angegeben wurde. Die folgenden beiden Beispiele mögen diese Verhältnisse veranschaulichen.

(I.) $$\beta = \frac{7}{17} = 1/3 - 1/2 - 1/4$$

liefert

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{17}, \frac{5}{12}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1};$$
$$[0], [3], [4], [7], [6], [5], [2], [1],$$

während

(II.) $$\beta = \frac{9}{31} = 1/3 + 1/2 + 1/4$$

auf

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{9}{31}, \frac{7}{24}, \frac{5}{17}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1};$$
$$[0], [4], [5], [9], [8], [7], [6], [3], [2], [1]$$

führt.

§ 3.

Bei der Kettenbruch-Entwickelung von β kann man auch so verfahren, dass man bei den Divisionen stets diejenige ganze Zahl nimmt, welche dem wirklichen Werthe des Quotienten am nächsten liegt, gleichgültig, ob es die grössere oder die kleinere ist. —

Man könnte eine vierte Entwickelung geben, bei welcher für die Theilnenner umgekehrt stets diejenige ganze Zahl genommen wird, welche einen Rest vom absoluten Betrage $> \frac{1}{2}$ liefert. —

Bei diesen beiden letzten Vorschriften wird eine Unbestimmtheit eintreten können, aber nur in dem Falle, dass ein

$$\frac{1}{\beta_\tau} = p + \frac{1}{2} = (p+1) - \frac{1}{2}$$

wird. Dies kann natürlich nur am Schlusse der Entwickelung geschehen; und dann soll thatsächlich das Eine wie das Andere als möglich angenommen werden; es gelten dann beide Entwickelungen.

Wir gehen jedoch auf diese Darstellungen und die aus ihnen folgenden Bruch-Reihen nicht ein, da im nächsten Paragraphen eine Verallgemeinerung der bisherigen Vorschriften gegeben werden soll.

$$Z_{k+1} N_k - Z_k N_{k+1} = (-1)^k \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_k \varepsilon_{k+1};$$

$$\beta - \frac{Z_{k+2}}{N_{k+2}} = \frac{(-1)^{k+2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_{k+2} \varepsilon_{k+3} \beta_{k+2}}{[(g_{k+2} + \varepsilon_{k+3} \beta_{k+2}) N_{k+1} + \varepsilon_{k+2} N_k] N_{k+2}};$$

$$\beta - \frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_{k+1} \varepsilon_{k+2}}{[(g_{k+2} + \varepsilon_{k+3} \beta_{k+2}) N_{k+1} + \varepsilon_{k+2} N_k] N_{k+1}};$$

$$\beta - \frac{Z_k}{N_k} = \frac{(-1)^k \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_k \varepsilon_{k+1} (g_{k+2} + \varepsilon_{k+3} \beta_{k-2})}{[(g_{k+2} + \varepsilon_{k+3} \beta_{k+2}) N_{k+1} + \varepsilon_{k+2} N_k] N_k}.$$

Es liegt nach den beiden letzten Formeln β nur dann zwischen $\frac{Z_k}{N_k}$ und $\frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}}$, wenn $\varepsilon_{k+2} = +1$ ist. Es kann ferner bei den jetzigen Annahmen

$$\left|\beta - \frac{Z_{k+1}}{N_{k+1}}\right| > \left|\beta - \frac{Z_k}{N_k}\right|$$

werden. Dazu muss

$$\frac{1}{N_{k+1}} > \frac{g_{k+2} + \varepsilon_{k+3} \beta_{k+2}}{N_k} = \frac{1}{\beta_{k+1} N_k},$$

$$\beta_{k+1} > \frac{N_{k+1}}{N_k}$$

sein. Da nun β ein echter Bruch ist, so fordert die letzte Beziehung, dass $N_{k+1} < N_k$ wird, und dies ist nach der obigen Formel nur für

$$g_{k+1} = 1, \quad \varepsilon_{k+1} = -1$$

möglich. Dass der besprochene Fall auch wirklich eintreten kann, zeigt das Beispiel

$$\beta = \frac{29}{72} = 1/3 - 1/1 + 1/1 + 1/14;$$

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{3}, \ \frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{2}, \ \frac{Z_3}{N_3} = \frac{2}{5}, \ \frac{Z_4}{N_4} = \frac{29}{72};$$

hier wird nämlich

$$\beta - \frac{Z_1}{N_1} = \frac{29}{72} - \frac{1}{3} = \frac{5}{72}; \ \beta - \frac{Z_2}{N_2} = \frac{29}{72} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{72}.$$

Ebenso kann auch weiter

$$\left|\beta - \frac{Z_{k+2}}{N_{k+2}}\right| > \left|\beta - \frac{Z_k}{N_k}\right|$$

werden. Das folgende Beispiel giebt einen Beleg dafür.

$$\beta = \frac{65}{211} = 1/4 - 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/1 + 1/16;$$

$$\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{4},\ \frac{Z_2}{N_2}=\frac{2}{7},\ \frac{Z_3}{N_3}=\frac{3}{10},\ \frac{Z_4}{N_4}=\frac{1}{3},\ \frac{Z_5}{N_5}=\frac{4}{13},\ \frac{Z_6}{N_6}=\frac{65}{211};$$

man findet:

$$\beta-\frac{Z_2}{N_2}=\frac{65}{211}-\frac{2}{7}=\frac{99}{21\cdot 211},$$

$$\beta-\frac{Z_4}{N_4}=\frac{65}{211}-\frac{1}{3}=-\frac{112}{21\cdot 211}.$$

In strengstem Sinne kann man hier also nicht von Näherungswerthen sprechen.

§ 5.

Jede der nach den Annahmen des vorigen Paragraphen möglichen Entwickelungen führt auf eine Reihe von Brüchen, genau wie dies im ersten und im zweiten Paragraphen gezeigt worden ist. Die Construction dieser Reihe schliesst sich genau den dort gegebenen Vorschriften an. Wir haben bei der Bildung zwei Fälle zu unterscheiden, wenn wir von der bis zu

$$(16.)\qquad 1/g_1+\varepsilon_2/g_2+\dots\varepsilon_x/g_x$$

durchgeführten Construction der Reihe bis zu der zu

$$(16^a.)\qquad 1/g_1+\varepsilon_2/g_2+,\dots,+\varepsilon_x/g_x+\varepsilon_{x+1}/g_{x+1}$$

gehörigen übergehen wollen; je nachdem nämlich $\varepsilon_{x+1}+1$ oder $=-1$ ist, muss man verschieden verfahren.

I. *Es sei* $\varepsilon_{x+1}=+1$. Wir nennen den zu (16.) gehörigen, zuletzt auftretenden Bruch $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$, und $\frac{z_\beta}{n_\beta}$, $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ seien die beiden unmittelbar benachbarten Brüche auf beiden Seiten von $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$. Hierbei möge die Richtung von $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ nach $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ mit derjenigen der voraufgehenden letzten Serie zusammenfallen. Dann findet man die neuen, durch (16^a.) bedingten, der Reihe (16.) hinzuzufügenden Brüche, indem zwischen $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ und $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ vom ersten nach dem letzten zu

$$(17.)\qquad \frac{z_\gamma+z_\alpha}{n_\gamma+n_\alpha},\ \frac{z_\gamma+2z_\alpha}{n_\gamma+2n_\alpha},\dots,\frac{z_\gamma+(g_x+1)z_\alpha}{n_\gamma+(g_x+1)n_\alpha}$$

eingeschoben werden.

II^a. *Es sei* $\varepsilon_{x+1}=-1$. Die eben festgesetzten Bezeichnungen mögen auch hier gelten. Dann findet man die neuen, durch (16^a.) bedingten Brüche, indem man zwischen $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ und $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ in der Richtung vom ersten nach

dem letzten zu die Glieder

$$(18.)\qquad \frac{z_\beta + z_\alpha}{z_\beta + n_\alpha},\ \frac{z_\beta + 2z_\alpha}{n_\beta + 2n_\alpha},\dots,\frac{z_\beta + (g_{x+1} - 1)z_\alpha}{n_\beta + (g_{x+1} - 1)n_\alpha}$$

einschiebt. — Ist $g_{x+1} = 1$, so wird kein neues Glied gebildet; dagegen tritt $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ als einziges Glied der neuen Serie auf; es kann also dasselbe Glied häufiger als einmal in die Construction der Reihe eingehen.

Ausser dieser Bildung II^a kann man, wie in § 2 bei (14.) gezeigt ist, auch eine andere Bildungsvorschrift, die sich mehr an I anschliesst, II^b gelten lassen, welche auf die neuen Brüche

$$(18^a.)\qquad \left[\frac{z_\alpha - z_\gamma}{n - n_\alpha}\right],\ \frac{2z_\alpha - z_\gamma}{2n_\alpha - n_\gamma},\ \frac{3z_\alpha - z_\gamma}{3n_\alpha - n_\gamma},\dots,\frac{g_{x+1}z_\alpha - z_\gamma}{g_{x+1}n_\alpha - n_\gamma}$$

führt. Der eingeklammerte Bruch ist mit $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ identisch und daher beim Einschieben zu unterdrücken.

Aus I und aus II^b geht hervor, dass die Schlussglieder der einzelnen Serien der Reihe nach mit den Näherungswerthen

$$1/g_1,\quad 1/g_1 + \varepsilon_2/g_2,\quad 1/g_1 + \varepsilon_2/g_1 + \varepsilon_3/g_3,\dots$$

übereinstimmen, so dass also zwischen zwei auf einander folgenden Endgliedern nach den Formeln des vorigen Paragraphen die Kettenbruch-Relation stattfindet. Aus den Bildungen (17.), (18.), (18^a.) folgt, dass auch zwei auf einander folgende Brüche einer Serie dieser Relation genügen, da dies für die Serien-Endglieder der Fall ist.

Ferner wachsen die Zähler und die Nenner von beiden Seiten her auf β zu. Denn wie in § 4 gezeigt wurde, kann $N_{x+1} < N_x$; $Z_{x+1} < Z_x$ nur für

$$g_{x+1} = 1,\ \varepsilon_{x+1} = -1$$

werden; in diesem Falle aber tritt überhaupt kein neues Glied auf.

Die beiden letzten Ueberlegungen zeigen, *dass sämmtliche bei unseren allgemeinen Voraussetzungen möglichen Reihen von Brüchen mit der besonderen im § 1 behandelten übereinstimmen.* Wir wollen die Nummerirung dieser Reihen nach den Vorschriften des ersten Paragraphen, *nicht* nach denen der eben besprochenen Bildungsvorschriften durchführen.

§ 6.

Die Anzahl sämmtlicher Brüche, die von einander verschieden sind, muss nach unseren Darlegungen bei allen möglichen Entwickelungen die-

selbe sein. Da für $\varepsilon_x = +1$ die Anzahl g_x für die neue Serie auftritt, und für $\varepsilon_x = -1$ die Anzahl $(g_x - 1)$, so folgt, dass *bei allen Entwickelungen, die nach den Festsetzungen von § 4 möglich sind, die Summe*

$$(19.) \qquad \Sigma \left(g_x - \frac{1-\varepsilon_x}{2}\right) \qquad (\varepsilon_1 = 1)$$

eine Constante ist.

Auch der Ueberschuss der Anzahl der Brüche rechts von β über die Brüche links von β wird eine Constante geben. Die Abzählung ist etwas schwieriger; man muss bei g_x sowohl ε_x wie ε_{x+1} berücksichtigen und findet bei genauerer Ueberlegung, dass g_x für die eine oder für die andere Anzahl d. h. für die rechts oder die links stehenden Brüche mit

$$g_x - \frac{3 - \varepsilon_x - 2\varepsilon_{x+1}}{2}$$

Einheiten gerechnet werden muss. Für das Endglied der ganzen Entwickelung $\varepsilon_\lambda/g_\lambda$ ist

$$g_\lambda - \frac{3-\varepsilon_\lambda}{2}$$

zu setzen. *Aus* $\cdots + 1/g_x \pm \cdots$ *folgt also der Beitrag* g_x *oder* $(g_x - 2)$, *und aus* $-1g_x \pm$ *folgt* $(g_x - 1)$ *oder* $(g_x - 3)$. Rechnet man die Brüche $> \beta$ als positiv, diejenigen $< \beta$ als negativ, so ist der aufgestellten Anzahl das Zeichen

$$(-\varepsilon_2)(-\varepsilon_3)\dots(-\varepsilon_x)$$

zu geben, wobei aber diejenigen Factoren $(-\varepsilon_\lambda)$ unterdrückt werden, bei denen $g_\lambda = 1$ ist. Unter diesen Festsetzungen folgt, dass *bei allen Entwickelungen die Summe*

$$(19^a.) \qquad \Sigma (-\varepsilon_2)(-\varepsilon_3)\dots(-\varepsilon_x)\left[g_x - \frac{3-\varepsilon_x - 2\varepsilon_{x+1}}{2}\right]$$

eine Constante ist. —

Die Brüche $\frac{1}{q}$ lassen nur die *eine* Entwickelung $1/q$ zu; die Brüche $\frac{2}{2q+1}$ die beiden Entwickelungen

$$1/q + 1/2 \text{ und } 1/(q+1) - 1/2.$$

Wir wollen annehmen, es sei für alle Brüche $\frac{p}{q}$, deren Zähler $p < m$ ist, bereits bewiesen, dass p die Anzahl der Entwickelungsmöglichkeiten giebt. Dann können wir durch strenge Induction beweisen, dass für alle $\frac{m}{q}$ die

Anzahl der Entwickelungen auch durch den Zähler m gegeben wird; der man hat die beiden möglichen Anfänge für die Entwickelungen

$$\frac{m}{q} = 1/\left[\frac{q}{m}\right] + \beta_1 \quad \text{oder} \quad \frac{m}{q} = 1/\left[\frac{q}{m} + 1\right] - \beta_1'$$

Hier sind β_1, β_1' zwei Brüche mit dem Nenner m, deren beide Zähler sic zu m ergänzen,

$$\beta_1 = \frac{x}{m}, \quad \beta_1' = \frac{m - x}{m}.$$

Für diese beiden sind der Annahme nach die Entwickelungsmöglicl keiten der Zahl nach durch x und durch $(m - x)$ gegeben. Somit hat ma insgesamt $x + (m - x) = m$ Entwickelungen. *Die Anzahl der Entwicke lungen eines echten Bruches β unter den gemachten Voraussetzungen ist glei dem Zähler dieses Bruches.*

Die Ausführung der Entwickelungen kann leicht schematisch durcl gemacht werden, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir gehen von

$$\beta = \frac{7}{9}$$

aus und haben zuerst die beiden zweigliederigen Entwickelungen

$$\beta = 1/1 + 2/7 = 1/2 - 5/7.$$

Jeder der beiden Brüche giebt Veranlassung zur Bildung zweier dr gliederiger Entwickelungen, indem man 2/7 und 5/7 zweigliedrig entwick

$$\beta = 1/1 + 1/3 + 1/2 = 1/1 + 1/4 - 1/2$$
$$= 1/2 - 1/1 + 2/5 = 1/2 - 1/2 - 3/5.$$

Die beiden Brüche der ersten Zeile sind, weil ihre letzten Theilzähler s den absoluten Werth 1 haben, in der Entwickelung zu Ende geführt beiden letzten geben weiter je zwei viergliedrige Entwickelungen, man 2/5 und 3/5 auf je zwei Arten zweigliedrig darstellt:

$$\beta = 1/2 - 1/1 + 1/2 + 1/2 = 1/2 - 1/1 + 1/3 - 1/2$$
$$= 1/2 - 1/2 - 1/1 + 2/3 = 1/2 - 1/2 - 1/2 - 1/3.$$

Hier ist die Operation an dreien der Brüche vollendet; der übrig b giebt zu zwei fünfgliederigen Entwickelungen Anlass, mit denen Abschluss erreicht ist:

$$\beta = 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/1 + 1/2 = 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/2 -$$

Man erkennt hierbei, dass jede nicht beendete Entwickelung auf zwei neue, um ein Glied vermehrte Entwickelungen führt. Liefert also β genau α_1 eingliedrige, α_2 zweigliedrige Entwickelungen u. s. f. ... α_k von k Gliedern, so ist die Summe

$$\frac{\alpha_1}{1}+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{2^2}+\frac{\alpha_4}{2^3}+\cdots$$

gleich 1. *Man hat also die Gleichung*

$$\Sigma \frac{\alpha_\varkappa}{2^{\varkappa-1}}=1, \tag{20.}$$

wenn $\alpha_\varkappa$ die Anzahl der Entwickelungen von β in einen $\varkappa$-gliedrigen Kettenbruch unter den in § 4 gemachten Annahmen angiebt. Man erkennt daraus, dass die längsten Entwickelungen in gerader Anzahl auftreten. —

Ist ε_τ/g_τ der letzte bei der Entwickelung von β auftretende Theilbruch, so ist $g_\tau>1$. Wir betrachten die Entwickelung

$$1/g_1+\varepsilon_2/g_2+\cdots+\varepsilon_\tau/h \qquad (h=1,2,\ldots g_\tau),$$

welche für $h=g_\tau$ mit β zusammenfällt. Ist $\varepsilon_\tau=+1$, so haben die zu $h=1,2,3\ldots$ gehörigen Brüche der Reihe nach wachsende Zähler und Nenner, und zu $h=g_\tau-1$ gehört derjenige der beiden dem β benachbarten Brüche, welcher den grösseren Nenner und den grösseren Zähler besitzt. Es sei dies $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$. Ist $\varepsilon_\tau=-1$, so haben die zu $h=2,3,\ldots$ gehörigen Brüche der Reihe nach wachsende Zähler und Nenner, und zu $h=g_\tau-1$ gehört, *wenn $g_\tau>2$ ist,* wieder der Bruch $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$. *Ist aber $\varepsilon_\tau=-1$ und $h=g_\tau-1$ bei $g_\tau=2$,* so führt die Bildung auf den von der anderen Seite her dem β benachbarten Bruch $\frac{z_\varrho}{n_\varrho}$.

Diese beiden Brüche $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$, $\frac{z_\varrho}{n_\varrho}$ sind nach § 1 die einzigen, welche zu β in der Kettenbruch-Relation stehen; folglich sind es die einzigen, die bei irgend einer erlaubten Entwickelung der Kettenbruch

$$1/g_1+\varepsilon_2/g_2+\cdots+\varepsilon_{\tau-1}/g_{\tau-1} \tag{21.}$$

liefern kann. Nach dem eben abgeleiteten Resultate muss also, wenn

$$1/g_1+\varepsilon_2/g_2+\cdots+\varepsilon_{\tau-1}/g_{\tau-1}+\varepsilon_\tau/(g_\tau-1) \tag{22.}$$

gleich $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$ ist, (21.) den Werth $\frac{z_\varrho}{n_\varrho}$ haben; und wenn (22.) gleich $\frac{z_\varrho}{n_\varrho}$ ist, muss

(21.) den Werth $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$ besitzen. Da aber die Anzahl der Entwickelungen von $\frac{z_\varrho}{n_\varrho}$ gleich z_ϱ ist, so folgt: *Sind die Brüche*

$$\frac{z_\sigma}{n_\sigma},\ \frac{z_\varrho}{n_\varrho}$$

die beiden den Bruch β einschliessenden Brüche, so geht in jeder unter allen Entwickelungen der Näherungswerthe von β einer dieser beiden dem β unmittelbar voran, und zwar $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$ gerade z_ϱ-mal und $\frac{z_\varrho}{n_\varrho}$ umgekehrt z_σ-mal. Sind Zähler und Nenner von $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$ grösser als Zähler und Nenner von $\frac{z_\varrho}{n_\varrho}$, so kommt der erste Fall genau so oft vor, als Entwickelungen mit dem Gliede

$$\cdots + \varepsilon_\tau/g_\tau = \cdots - 1/2$$

enden; diese Anzahl stimmt also mit z_σ überein, d. h. mit dem Zähler des letzten Näherungsbruches, der bei der Entwickelung von β mit nur positiven Theilquotienten auftritt. —

Bei dem Beispiele $\beta = \frac{7}{9}$ ergaben sich die 7 Entwickelungen

$1/1 + 1/3 + 1/2, \quad 1/1 + 1/4 - 1/2;$
$1/2 - 1/1 + 1/2 + 1/2, \quad 1/2 - 1/1 + 1/3 - 1/2, \quad 1/2 - 1/2 - 1/2 - 1/3;$
$1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/1 + 1/2, \quad 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/2 - 1/2.$

Die Gesamtheit derselben wollen wir als den ***Entwickelungstypus*** von $\frac{7}{9}$ bezeichnen; er besteht aus 2 Entwickelungen von 3 Gliedern, aus 3 Entwickelungen von 4 und aus zweien von 5 Gliedern. Dies schreiben wir kurz

$$t\left(\frac{7}{9}\right) = [3^2;\ 4^3;\ 5^2].$$

Allgemein soll die symbolische Gleichung

$$t(\beta) = [1^{\alpha_1}; 2^{\alpha_2}; 3^{\alpha_3}; \ldots]$$

angeben, dass unter den Entwickelungen von β genau α_1 eingliedrige, α_2 zweigliedrige, α_3 dreigliedrige Kettenbrüche auftreten, u. s. f.

Aus der Beziehung

$$\frac{m}{xm+n} = 1/x + n/m = 1/(x+1) - \frac{m-n}{m}$$

folgt, dass man den Typus

$$t\left(\frac{m}{xm+n}\right)$$

erhält, wenn in den rechten Seiten der Typen-Gleichungen für

$$t\left(\frac{n}{m}\right) \quad \text{und} \quad t\left(\frac{m-n}{m}\right)$$

die Klammern, welche sie darstellen

$$[1^{a_1}; 2^{a_2}; 3^{a_3}; \ldots] \quad \text{durch} \quad [2^{a_1}; 3^{a_2}; 4^{a_3}; \ldots]$$

ersetzt werden. Wir wollen diese Operation durch das Symbol

$$(23.) \qquad t\left(\frac{m}{xm+n}\right) = t\left(\frac{n}{m}; +1\right) + t\left(\frac{m-n}{m}; +1\right)$$

andeuten.

Nunmehr können wir *den Satz beweisen, dass die beiden Typen*

$$(24.) \qquad t\left(\frac{ab+1}{x(ab+1)+a}\right) = t\left(\frac{ab+1}{x(ab+1)+b}\right)$$

übereinstimmen. So hat z. B. $\frac{7}{9}$ denselben Typus wie $\frac{7}{10}$, wobei im allgemeinen Satze $a=2$, $b=3$, $x=1$ genommen ist. In der That hat man für $\frac{7}{10}$

$1/1+1/2+1/3$; $\quad 1/2-1/2-1/4$;

$1/1+1/3-1/1+1/2$; $\quad 1/1+1/3-1/2-1/2$; $\quad 1/2-1/1+1/1+1/3$;

$1/2-1/1+1/2-1/1+1/2$; $\quad 1/2-1/1+1/2-1/2-1/2$.

Es ist also wirklich

$$t\left(\frac{7}{10}\right) = [3^2; 4^3; 5^2] = t\left(\frac{7}{9}\right).$$

Den Beweis des allgemeinen Satzes stützen wir auf die Formel (23.). Sie giebt für die linke Seite von (24.) die Umformung

$$t\left(\frac{a}{ab+1}; +1\right) + t\left(\frac{ab-a+1}{ab+1}; +1\right)$$

und für die rechte Seite von (24.) ähnlich

$$t\left(\frac{b}{ab+1}; +1\right) + t\left(\frac{ab-b+1}{ab+1}; +1\right).$$

Sind nun aber diese beiden Ausdrücke einander gleich, dann ist auch

$$(25.) \quad t\left(\frac{a}{ab+1}\right) + t\left(\frac{ab-a+1}{ab+1}\right) = t\left(\frac{b}{ab+1}\right) + t\left(\frac{ab-b+1}{ab+1}\right).$$

Der Beweis von (25.) ersetzt also den von (24.). Auf jeder der beiden Seiten von (25.) wenden wir jetzt wieder (23.) an und unterdrücken, genau wie soeben, das anzufügende $+1$ auf beiden Seiten. Dann entsteht als zu beweisende Gleichung

$$t\left(\frac{1}{a}\right)+t\left(\frac{a-1}{a}\right)+t\left(\frac{a}{ab-a+1}\right)+t\left(\frac{ab-2a+1}{ab-a+1}\right)$$
$$=t\left(\frac{1}{b}\right)+t\left(\frac{b-1}{b}\right)+t\left(\frac{b}{ab-b+1}\right)+t\left(\frac{ab-2b+1}{ab-b+1}\right);$$

hier ist $t\left(\frac{1}{a}\right)=t\left(\frac{1}{b}\right)=[1^1]$; folglich wird die zu beweisende Gleichung

$$t\left(\frac{a-1}{a}\right)+t\left(\frac{a}{ab-a+1}\right)+t\left(\frac{ab-2a+1}{ab-a+1}\right)=t\left(\frac{b-1}{b}\right)$$
$$+t\left(\frac{b}{ab-b+1}\right)+t\left(\frac{ab-2b+1}{ab-b+1}\right).$$

Von hier aus gelangt man auf demselben Wege zu der Gleichung

$$t\left(\frac{a-2}{a-1}\right)+t\left(\frac{a-1}{a}\right)+t\left(\frac{a}{ab-2a+1}\right)+t\left(\frac{ab-3a+1}{ab-2a+1}\right)$$
$$=t\left(\frac{b-2}{b-1}\right)+t\left(\frac{b-1}{b}\right)+t\left(\frac{b}{ab-2b+1}\right)+t\left(\frac{ab-3b+1}{ab-2b+1}\right),$$

u. s. w. Nun nehmen wir an, a sei $<b$; dann erreichen wir auf dem angegebenen Wege die Gleichung

$$(26.)\quad \begin{cases} t\left(\frac{1}{2}\right)+t\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+t\left(\frac{a-1}{a}\right)+t\left(\frac{a}{ab-(a-1)a+1}\right) \\ \qquad +t\left(\frac{ab-aa+1}{ab-(a-1)a+1}\right) \\ =t\left(\frac{b-a+1}{b-a+2}\right)+t\left(\frac{b-a+2}{b-a+3}\right)+\cdots+t\left(\frac{b-1}{b}\right) \\ \qquad +t\left(\frac{b}{ab-(a-1)b+1}\right)+t\left(\frac{1}{ab-(a-1)b+1}\right), \end{cases}$$

deren rechte Seite

$$(26^a.)\quad t\left(\frac{b-a+1}{b-a+2}\right)+t\left(\frac{b-a+2}{b-a+3}\right)+\cdots+t\left(\frac{b-1}{b}\right)+t\left(\frac{b}{b+1}\right)+t\left(\frac{1}{b+1}\right)$$

wird.

Diese Beziehung (26.) bezw. (26^a.) wäre also zu beweisen. Die weitere Anwendung der gleichen Methode führt links auf

$$t\left(\frac{1}{2}\right)+t\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+t\left(\frac{a-1}{a}\right)+t\left(\frac{a}{a(b-1)-(a-1)a+1}\right)$$
$$+t\left(\frac{a(b-1)-aa+1}{a(b-1)-(a-1)a+1}\right),$$

also auf einen Ausdruck, in dem gegenüber (26.) das b um eine Einheit vermindert erscheint; rechts kommt man auf einen Ausdruck von gleicher Eigenschaft; (26.) und damit (24.) ist also bewiesen, wenn man b bis auf a erniedrigt hat. So ist der Beweis geführt. —

Man erkennt leicht, dass die Formeln gelten:

$$t\left(\frac{2}{2m+1}\right)=[2^2];$$
$$t\left(\frac{3}{3m+1}\right)=t\left(\frac{3}{3m+2}\right)=[2^1;3^2];$$
$$t\left(\frac{4}{4m+1}\right)=t\left(\frac{4}{4m+3}\right)=[2^1;3^1;4^2];$$
$$t\left(\frac{5}{5m+1}\right)=t\left(\frac{5}{5m+4}\right)=[2^1;3^1;4^1;5^2];$$
$$t\left(\frac{5}{5m+2}\right)=t\left(\frac{5}{5m+3}\right)=[3^3;4^2];$$

. . . .

$$t\left(\frac{m}{\varkappa m+1}\right)=[2^1;3^1;4^1;\ldots;(m-1)^1;m^2];$$
$$t\left(\frac{m}{\varkappa m+2}\right)=\left[3^2;4^2;\cdots,\left(\frac{m-1}{2}\right)^2;\left(\frac{m+1}{2}\right)^2;\left(\frac{m+3}{2}\right)^2\right];$$

. . . .

§ 7.

Eine andere Art, unsere *Farey*sche Reihe von Brüchen zu durchlaufen, ist die folgende: Von $\frac{0}{1}$ aus geht man zu einem der *folgenden* Brüche $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ über, der mit $\frac{0}{1}$ in Kettenbruchrelation steht; von $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ zu einem der *folgenden* Brüche $\frac{z_\beta}{n_\beta}$, der mit $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ in Kettenbruchrelation steht; u. s. f. bis zu β. Die Nummerirung soll dabei, wie schon oben festgesetzt worden ist, nach § 1 vor sich gegangen sein, und unter einem „folgenden" Bruche ein solcher mit höherer Nummer verstanden werden. Jedes derartige Durchlaufen der Reihe R giebt zur Bildung eines Kettenbruchs Veranlassung. Sind nämlich

$\frac{z_\alpha}{n_\alpha}, \frac{z_\beta}{n_\beta}, \frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ drei aufeinanderfolgend berührte Brüche, so können wir den Theilnenner g und das Zeichen $\varepsilon = \pm 1$ aus den beiden Gleichungen

$$z_\gamma = g z_\beta + \varepsilon z_\alpha, \quad n_\gamma = g n_\beta + \varepsilon n_\alpha$$

bestimmen, da hierbei durch Elimination

$$(27.) \qquad \begin{cases} \varepsilon (z_\alpha n_\beta - z_\beta n_\alpha) = z_\gamma n_\beta - z_\beta n_\gamma, \\ g (z_\alpha n_\beta - z_\beta n_\alpha) = z_\alpha n_\gamma - z_\gamma n_\alpha \end{cases}$$

wird. Die erste der beiden Gleichungen giebt wegen der Kettenbruch-Relationen, wie es sein muss, $\varepsilon = \pm 1$; die zweite zeigt, dass g eine ganze Zahl ist; aus ihr folgt ferner, wenn wir die *Kronecker*sche Bezeichnung $sgn(a) = a : |a|$ benutzen,

$$(27^a.) \qquad sgn(g) = sgn\left(\frac{z_\alpha}{n_\alpha} - \frac{z_\beta}{n_\beta}\right) . \, sgn\left(\frac{z_\alpha}{n_\alpha} - \frac{z_\gamma}{n_\gamma}\right),$$

und da $\frac{z_\beta}{n_\beta}, \frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ beide auf derselben Seite von $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ liegen, nämlich auf der, auf welcher auch der Bruch β sich befindet, *so ist,* wie es nothwendig war, *g positiv;* also lassen sich die Brüche als Näherungswerthe in einer Entwickelung

$$1/g_1 + \varepsilon_2/g_2 + \varepsilon_3/g_3 + \cdots + \varepsilon/g + \cdots$$

auffassen.

Als Beispiel hierfür geben wir alle Entwickelungen von $\beta = \frac{5}{12}$, die den zu Anfang des Paragraphen gemachten Bedingungen entsprechen. Es sind

1/2 + 1/2 + 1/2; 1/2 + 1/3 − 1/2; 1/3 − 1/2 − 1/3.
1/1 + 1/1 − 1/3 + 1/2; 1/1 + 1/1 − 1/4 − 1/2; 1/2 + 1/1 + 1/1 − 1/3;
1/2 + 1/2 + 1/1 + 1/1; 1/3 − 1/2 − 1/2 + 1/1.
1/1 + 1/1 − 1/2 + 1/1 − 1/3; 1/1 + 1/1 − 1/3 + 1/1 + 1/1;
1/2 + 1/1 + 1/1 − 1/2 + 1/1.
1/1 + 1/1 − 1/2 + 1/1 − 1/2 + 1/1.

Bezeichnen wir die hierher gehörigen Entwickelungstypen mit τ, so ist

$$\tau\left(\frac{5}{12}\right) = [3^3; 4^5; 5^3; 6^1];$$

die Anzahl der Entwickelungen ist hier gleich dem Nenner von β.

Wir können allgemein beweisen: *Die Anzahl der Entwickelungen eines Bruches β unter den jetzt geltenden Voraussetzungen ist gleich dem Nenner dieses Bruches.* Wir nehmen an, der Beweis sei schon für Brüche mit kleineren Nennern geliefert. Da der Satz für

$$\frac{1}{2} = 1/1 + 1/1 = 1/2,$$

$$\frac{1}{3} = 1/1 + 1/1 - 1/2 = 1/2 + 1/1 = 1/3,$$

$$\frac{2}{3} = 1/1 + 1/1 + 1/1 = 1/2 - 1/2 = 1/1 + 1/2$$

richtig ist, so können wir ihn auf dem Wege der strengen Induction beweisen. Es sei nun

$$\beta = 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \cdots + 1/a_x = \frac{z_a}{n_a},$$

$$\beta' = \qquad 1/a_2 + 1/a_3 + \cdots + 1/a_x = \frac{z'_a}{n'_a},$$

$$\beta'' = \qquad\qquad 1/a_3 + \cdots + 1/a_x = \frac{z''_a}{n''_a},$$

dann ist bekanntlich

$$z_a = n'_a, \qquad z'_a = n''_a,$$

und daher wird

$$\beta = \frac{z_a}{n_a} = \frac{1}{a_1 + \frac{z'_a}{n'_a}} = \frac{n'_a}{a_1 n'_a + n''_a} = \frac{z_a}{a_1 z_a + z'_a}.$$

Unternehmen wir es nun, alle Entwickelungen, die unseren Voraussetzungen genügen, für β, d. h. für die *Farey*sche Reihe

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{a_1+1}, \frac{2}{2a_1+1}, \cdots, \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}, \cdots, \frac{1}{a_1}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

aufzustellen, so muss das erste Glied aus $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1+1}$, entnommen sein, da dies die einzigen Brüche der Reihe sind, welche mit $\frac{0}{1}$ in der Kettenbruch-Relation stehen. Unter diesen sind $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{a_1-1}$ nur mit dem jedesmal folgenden der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{a_1}$ in dieser Relation. Beginnen wir daher mit einem der Glieder $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{a_1-1}$ die Entwickelung, so



müssen hinter dieses Glied alle folgenden derselben Reihe gesetzt werden, bis zu $\frac{1}{a_1}$. Es giebt demnach an Entwickelungen, die mit einem der Brüche $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{a_1}$ beginnen, a_1-mal so viele als mit $\frac{1}{a_1}$ beginnen. Von diesen letzten giebt es aber n'_α; denn die Kettenbruch-Relationen der Glieder der Reihe für β' stimmen mit denen der Glieder der Reihe für β überein, sobald man in der letzten Bruchreihe die Glieder $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{a_1 - 1}$ weglässt und $\frac{1}{a_1}$ durch $\frac{0}{1}$ ersetzt denkt. Es giebt also $a_1 \cdot n'_\alpha$ solcher Entwickelungen.

An zweiter Stelle betrachten wir die Entwickelungen, die mit $\frac{1}{a_1 + 1}$ beginnen. Bei allen diesen muss die ganze Reihe $\frac{1}{a_1 + 1}, \frac{2}{2a_1 + 1}, \dots, \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$ durchlaufen werden; folglich ist die Zahl dieser Entwickelungen dieselbe, als ob man die *Farey*sche Reihe bei $\frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$ beginnen würde. Diese Zahl stimmt daher mit derjenigen der Entwickelungen von β'' überein; d. h. sie ist $= n''_\alpha$. Da nun

$$a_1 n'_\alpha + n''_\alpha = n_\alpha$$

ist, so ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Bei jeder dieser Entwickelungen steht in der Nummerirung vor dem letzten Bruche $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ entweder der links oder der rechts benachbarte. Diese beiden mögen $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}, \frac{z_\varrho}{n_\varrho}$ heissen; $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$ besitze die grösseren Zähler und Nenner. Entwickelt man $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$ nach den Vorschriften, die für uns jetzt bestehen, so führt jede dieser Entwickelungen durch Hinzunahme eines passend gewählten Theilquotienten g auf $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$; folglich *geht dem Bruche β bei seinen n_α Entwickelungen genau n_σ-mal der Bruch $\frac{z_\sigma}{n_\sigma}$ voran und demnach n_τ-mal der Bruch $\frac{z_\tau}{n_\tau}$.*

In dem obigen Beispiel für $\beta = \frac{5}{12}$ lautet die *Farey*sche Reihe

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \beta = \frac{5}{12}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1};$$

bei der ersten, dritten, vierten, sechsten und neunten Entwickelung ist $\frac{2}{5}$ das vorletzte Glied in der Nummerirung, bei den sieben anderen ist es $\frac{3}{7}$.

Es mögen noch einige Entwickelungstypen angegeben werden, auf deren Beweis wir nicht eingehen:

$$\tau\left(\frac{1}{n}\right) = \left[1,\ 2,\ 3, \ldots, (n-1), n\right];$$
$$\tau\left(\frac{2}{n}\right) = \left[2^2, 3^2, \ldots, \left(\frac{n+1}{2}\right)^2, \frac{n+3}{2}\right];$$
$$\tau\left(\frac{3}{3n+1}\right) = \left[2, 3^3, 4^3, \ldots, (n+1)^3, (n+2)^2, (n+3)\right];$$
$$\tau\left(\frac{3}{3n+2}\right) = \left[2, 3^3, 4^3, \ldots, (n+1)^3, (n+2)^3, (n+3)\right];$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\tau\left(\frac{n-2}{n}\right) = \left[3^2, 4^2, \ldots, \left(\frac{n-3}{2}\right)^2, \left(\frac{n-1}{2}\right)^3, \left(\frac{n+1}{2}\right)^3, \left(\frac{n+3}{2}\right)^1\right];$$
$$\tau\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left[2, 3, 4, \ldots, (n-2), (n-1)^2, n\right].$$

Die Formel für $\tau\left(\frac{n-2}{n}\right)$ hat Ausnahmen für $n = 3$ und 5; es ist nämlich

$$\tau\left(\frac{1}{3}\right) = \left[1, 2, 3\right];\quad \tau\left(\frac{3}{5}\right) = \left[2,\ 3^3,\ 4\right].$$

Eine Beziehung, ähnlich wie (24.) für die t, scheint nicht zu bestehen. Dagegen führt die obige Schlussfolgerung, welche die Anzahlbestimmung der Entwickelungen lieferte, ohne weiteres auf eine Reductionsformel für die Typen der jetzt möglichen Entwickelungen. Ist nämlich

$$\tau\left(\frac{p}{q}\right) = \left[2^\alpha,\ 3^\beta,\ 4^\gamma, \ldots\right],$$

so möge, entsprechend den oben gemachten Einführungen,

$$\tau\left(\frac{p}{q};\ +m\right) = \left[(m+2)^\alpha,\ (m+3)^\beta,\ (m+4)^\gamma, \ldots\right]$$

gesetzt werden. *Dann gilt die Recursionsformel*

$$(29.)\quad \begin{cases} \tau\left(\frac{z_a}{n_a}\right) = \tau\left(\frac{z'_a}{n'_a};\ +1\right) + \tau\left(\frac{z'_a}{n'_a};\ +2\right) + \cdots + \tau\left(\frac{z'_a}{n'_a};\ +a_1\right) \\ \qquad\qquad\qquad + \tau\left(\frac{z''_a}{n''_a};\ +a_2\right), \end{cases}$$

falls die Bezeichnungen (28.) *benutzt werden. Ist dabei die Entwickelung von β zweigliedrig*:

$$\beta = 1/a_1 + 1/a_2 = \frac{z_\alpha}{n_\alpha};\ \beta' = 1/a_2 = \frac{z'_\alpha}{n'_\alpha},$$

dann ist zu setzen

$$\beta'' = \frac{0}{0};\ \tau\left(\frac{0}{0};\ +x\right) = [x].$$

Beispielsweise erhält man für den Bruch $\frac{3}{3n+1}$ als Typenbestimmung

$$\tau\left(\frac{3}{3n+1}\right) = \tau\left(\frac{1}{3};\ +1\right) + \tau\left(\frac{1}{3};\ +2\right) + \cdots + \tau\left(\frac{1}{3};\ +n\right) + \tau\left(\frac{0}{0},\ +3\right)$$
$$= [2,\ 3,\ 4] + [3,\ 4,\ 5] + \cdots + [n+1,\ n+2,\ n+3] + [3]$$
$$= [2,\ 3^3,\ 4^3,\ \ldots\ (n+1)^3,\ (n+2)^2,\ (n+3)],$$

was mit dem oben Angegebenen übereinstimmt.

§ 8.

Wir wollen endlich auch noch die Einschränkung fallen lassen, dass man bei dem Durchlaufen der Brüche stets zu folgenden, d. h. zu höher (nach § 1) nummerirten Gliedern übergeht. Um solche Operation aber als Kettenbruch darstellen zu können, muss zwischen je zwei einander folgenden Brüchen die Kettenbruch-Relation bestehen. Dabei sollen die Theilnenner g wesentlich positiv sein, während die ε gleich $+1$ oder -1 werden. Aus (27^a.) ergiebt sich, dass dafür, wenn $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$, $\frac{z_\beta}{n_\beta}$, $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ auf einander folgen, charakteristisch ist:

$$(30.)\qquad sgn\left(\frac{z_\alpha}{n_\alpha} - \frac{z_\beta}{n_\beta}\right) = sgn\left(\frac{z_\alpha}{n_\alpha} - \frac{z_\gamma}{n_\gamma}\right).$$

Es müssen also $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ und $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ gleichzeitig grösser oder gleichzeitig kleiner als $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ werden. Ist nun $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ ein Mittelglied oder das Endglied einer Serie (nach § 1), so kann mit diesem Bruche von den niedriger nummerirten nur der unmittelbar vorhergehende und das Schlussglied der voraufgehenden Serie in Kettenbruch-Relation stehen. Der erste Fall ist auszuschliessen, da sonst $\frac{z_\beta}{n_\beta}$, $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$, $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ neben einander treten würden, und da dies nach (27^a.) $g = 0$ ergeben müsste. Daraus folgt allgemein, dass ein und derselbe Bruch $\frac{z_\beta}{n_\beta}$

nicht zweimal, nur durch *einen* Zwischenbruch getrennt, auftreten darf. Also kann man von $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ *rückwärts* nur nach dem Schlussgliede der vorhergehenden Serie, $\frac{z_\beta}{n_\beta}$, gehen. Die Richtung von $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ nach $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ ist dieselbe wie die von $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ nach dem entwickelten Bruche β zu; daher liegt auch $\frac{z_\gamma}{n_\gamma}$ nach derselben Richtung hin; und da $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ nur mit den Gliedern der Serie, zu welcher $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ gehört, und zum Anfangsgliede der nächst höheren Serie in Kettenbruchrelation steht, so darf auf $\frac{z_\beta}{n_\beta}$ nur eins dieser Glieder folgen, d. h. der festgestellten Richtung wegen, oder damit $sgn(g) = +1$ sei, nur ein *höheres Glied der Serie mit* $\frac{z_\alpha}{n_\alpha}$ oder *das Anfangsglied der nächst höheren Serie.*

Wir betrachten vor allem die Entwickelungen, die auf frühere Glieder zurückführen; wir nennen solche: „Entwickelungen mit Rückkehr". Zum genaueren Studium dieser Verhältnisse betrachten wir zunächst den einfachen Fall, der unsere Annahmen erläutern soll,

$$(31.)\qquad \begin{cases} \frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\dots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{1}{1} \\ [0],\ [2],\ [3],\ [4],\dots,\ [n],\ [1]; \end{cases}$$

und bezeichnen der Bequemlichkeit halber die Brüche durch ihre Nummern, bei denen wir jetzt die Klammern unterdrücken. Dabei berücksichtigen wir nur die Folgen, bei denen wirklich ein Zurückgehen auf einen niedriger nummerirten Bruch vorkommt; die dem vorigen Paragraphen angehörigen Entwickelungen lassen wir bei Seite. Dann kann man etwa als zu durchlaufende Reihe die Entwickelungen mit Rückkehr bilden:

$$\begin{array}{l}
1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ \dots,\ n \\
1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ 6,\ 7,\ \dots,\ n \\
1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 6,\ 7,\ \dots\dots,\ n \\
1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ 1,\ 6,\ \dots,\ n \\
1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ 6,\ 1,\ 7,\ \dots,\ n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Wir können alle Bildungen von Entwickelungen mit Rückkehr durch die



Lösung der folgenden *combinatorischen Aufgabe* erhalten: *Die Reihe* $1, 2, 3, \ldots, n$ *soll durchlaufen werden; dabei dürfen auf die Glieder* $2, 3, \ldots, (n-1)$ *nur die nächst höheren dieser Reihe folgen oder die* 1; *diese darf mehrfach eingeschoben werden, doch müssen zwei Einsen mindestens durch zwei andere Glieder* $2, 3, \ldots, (n-1)$ *getrennt sein; folgt* 1 *auf* a, *dann muss auf* a, 1 *ein höheres Element als* a *folgen; die Reihe muss mit einem der beiden Elemente* 1 *oder* 2 *beginnen; mindestens ein Mal soll die* 1 *eingeschoben werden.* So hat man z. B. für $n = 5$ die zehn Möglichkeiten von Entwickelungen mit Rückkehr

1 2 3 4 1 5	2 3 1 4 5	2 1 4 5
1 2 3 1 4 5	2 3 1 5	2 1 5,
1 2 3 1 5	2 1 3 4 5	
2 3 4 1 5	2 1 3 4 1 5	

denen die zehn Kettenbruchentwickelungen von $\frac{4}{5}$ entsprechen

$1/1+1/1+1/1-1/2-1/1+1/1$; $1/2-1/2-1/1+1/1+1/1$; $1/2-1/1+1/2+1/1$;
$1/1+1/1+1/1-1/1+1/1+1/1$; $1/2-1/2-1/1+1/2$; $1/2-1/1+1/3$;
$1/1+1/1+1/1-1/1+1/2$; $1/2-1/1+1/1+1/1-1/2$;
$1/2-1/2-1/2-1/1+1/1$; $1/2-1/1+1/1+1/1-1/1+1/1$.

Wir wollen die Anzahl der zu (31.) gehörigen Entwickelungen mit Rückkehr bestimmen. Diese Anzahl bezeichnen wir mit $A(n)$. Jede Entwickelung endet mit n, und vor diesem n steht entweder $(n-1)$ oder 1. Die Anzahl der Entwickelungen erster Art sei $A(n;\, n-1)$, die der zweiten Art sei $A(n;\, 1)$. Dann ist

$$A(n) = A(n;\, n-1) + A(n;\, 1). \tag{32.}$$

Geht dem n das $(n-1)$ vorauf, so führt eine Unterdrückung von n auf eine zu $A(n-1)$ gehörige Entwickelung; und umgekehrt: hängt man an jede zu $A(n-1)$ gehörige Entwickelung noch das Element n an, dann kommt man zu einer Entwickelung von $A(n;\, n-1)$. Es ist also

$$A(n;\, n-1) = A(n-1). \tag{33.}$$

Geht dagegen dem n das Element 1 vorauf, so führt eine Unterdrückung beider entweder zu einer Entwickelung eines Gliedes von einem der Symbole

$$A(n-1;\, n-2),\ A(n-2;\, n-3), \ldots,\ A(3;\, 2),$$

— da nämlich vor $1, n$ kein $1, \varkappa$ stehen kann, sondern nur ein $(\varkappa - 1)$, — oder zu einer der $(2n - 5)$ folgenden Entwickelungen, die ohne die Elemente $1, n$ keine Rückkehr aufweisen,

$$1, 2, 3, 4, \ldots, (n-1);\quad 1, 2, 3, 4, \ldots, (n-2); \ldots\quad 1, 2, 3;$$
$$2, 3, 4, \ldots, (n-1);\quad 2, 3, 4, \ldots, (n-2); \ldots\quad 2, 3;\ 2.$$

Umgekehrt führen alle diese auf verschiedene zu $A(n, 1)$ gehörige Entwickelungen. Demnach ist die Gleichung bewiesen:

$$(34.)\qquad A(n; 1) = \sum_{\varkappa=3}^{n-1} A(\varkappa; \varkappa - 1) + (2n - 5) \qquad (A(3;2) = 0).$$

Gesetzt nun, man wüsste, dass die Beziehung

$$(35.)\qquad A(n; 1) = A(n-1) + 2$$

gilt, dann würde sich aus (34.) ergeben

$$\begin{aligned} A(n+1; 1) &= \sum_{\varkappa=3}^{n} A(\varkappa; \varkappa-1) + (2n-3) \\ &= A(n; n-1) + 2 + \sum_{\varkappa=3}^{n-1} A(\varkappa; \varkappa - 1) + (2n-5) \\ &= A(n; n-1) + 2 + A(n; 1) = A(n) + 2 \end{aligned}$$

nach (32.). Also ist (35.) richtig, wenn es für kleine Werthe von n gilt. Nun ist

$$A(3; 2) = 0;\quad A(4; 3) = 1;\quad A(5; 4) = 4;$$
$$A(3; 1) = 1;\quad A(4; 1) = 3;\quad A(5; 1) = 6;$$

demnach ist (35.) allgemein bewiesen. Durch Verbindung von (33.) und (35.) mit (32.) ergeben sich die Schlussresultate

$$(36.)\qquad \begin{aligned} A(n) &= 2(A(n-1) + 1) \\ &= 3 \cdot 2^{n-3} - 2, \end{aligned}$$

$$(37.)\qquad A(n; 1) = 3 \cdot 2^{n-4},\quad A(n; n-1) = 3 \cdot 2^{n-4} - 2.$$

Hier giebt (36.) die Anzahl aller Entwickelungen mit Rückkehr.

Jede der zu $A(n)$ gehörigen Entwickelungen beginnt entweder mit 1 oder mit 2. Wir wollen die Anzahl der mit 1 beginnenden durch $B(n)$ bezeichnen und ebenso die Anzahl der aus $A(n; 1)$ und aus $A(n; n-1)$ mit 1 beginnenden Entwickelungen bezw. mit $B(n; 1)$ und mit $B(n; n-1)$. Dann gilt natürlich die Gleichung

$$(38.)\qquad B(n) = B(n; n-1) + B(n; 1).$$

Nun kommt man von allen zu $B(n-1)$ gehörigen durch Anhängung des Elementes n zu solchen von $B(n; n-1)$ und umgekehrt von diesen zu jenen durch Weglassung von n. Demnach ist zunächst

$$(39.)\qquad B(n; n-1) = B(n-1).$$

Ferner kann man alle zu $B(n; 1)$ gehörigen Entwickelungen durch eine der drei nachstehenden Operationen erlangen: I. Man ersetzt in allen $B(n-1; 1)$ das letzte Element $(n-1)$ durch n. II. Man fügt in allen $B(n-1; n-2)$ rechts die Elemente $1, n$ hinzu. III. Man nimmt die eine neue Entwickelung $1, 2, 3, \ldots, (n-1), 1, n$ auf. Offenbar erhält man so alle Entwickelungen von $B(n; 1)$ und jede nur einmal; somit ist

$$(40.)\qquad B(n; 1) = B(n-1) + 1$$

und deswegen aus (38.)

$$(41.)\qquad B(n) = 2B(n-1) + 1.$$

Da nun $B(3) = 0$, $B(4) = 1$, $B(5) = 3$ ist, so folgt allgemein

$$(41^a.)\qquad B(n) = 2^{n-3} - 1,$$

$$(42.)\qquad B(n; 1) = 2^{n-4}, \quad B(n; n-1) = 2^{n-4} - 1.$$

Aus (36.) und (41^a.) ergiebt sich, dass von den zu $A(n)$ gehörigen Entwickelungen

$$C(n) = 2^{n-2} - 1$$

mit dem Elemente 2 beginnen. —

Schliesslich soll in aller Kürze noch die Anzahlbestimmung für die Entwickelungen der *Farey*schen Reihe

$$\frac{1}{a+1}, \frac{2}{2a+1}, \ldots, \frac{b}{ba+1}; \frac{1}{a}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$[a+1], [a+2], \ldots, [a+b]; [a], \ldots, [2], [1]$$

geliefert werden. Wir bestimmen zuerst die Entwickelungen mit Rückkehr. Da jedes der Glieder $1, 2, \ldots (a-1)$ nur vor dem nächst höheren auftreten kann, so kommt das Glied a in jeder Entwickelung vor, welche nicht mit $(a+1)$ beginnt; diese Entwickelungen können daher mit

$$1, 2, 3, \ldots, a, \ldots; \quad 2, 3, \ldots, a, \ldots; \quad \ldots (a-1), (a); \quad a$$

anfangen. Ihre Zahl ist folglich a-mal so gross als die der Entwickelungen, die zu der folgenden *Farey*schen Reihe gehören,

$$[2], [3], \ldots, [b+1], [1],$$

d. h. nach (41ᵃ.) gleich

$$a \cdot B(b+1) = a(2^{b-2} - 1).$$

Ausserdem kommen nur noch Entwickelungen vor, die mit $(a+1)$ beginnen. Das sind

$$C(b+1) = 2^{b-1} - 1.$$

Die Summe der beiden letzten Zahlen giebt die Anzahl der Entwickelungen mit Rückkehr. Nimmt man die übrigen hinzu, deren Anzahl gleich dem Nenner $(ab+1)$ ist, so folgt: *Die Anzahl der Kettenbruchentwickelungen eines Bruches von der Form* $\frac{b}{ab+1}$ *beträgt*

$$(a+2) \cdot 2^{b-2} + a(b-1).$$

Es ist jetzt klar, wie die weiteren Fälle zu behandeln sind; doch wird das Resultat bei der allgemeinen Frage nicht einfach genug, um hier abgeleitet zu werden.

Ueber die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der *Tschebyschef*schen Primzahlentheorie auf das Problem der Vertheilung der Primideale.

(Von Herrn *Edmund Landau* in Berlin.)

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Unter einer *Dirichlet*schen Reihe versteht man eine Reihe der Form

$$(1.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo die λ_n eine Folge mit dem Index n monoton ins Unendliche wachsender positiver Grössen sind, die a_n reelle oder complexe Coefficienten. Zu diesen Reihen gehören im besonderen (für $\lambda_n = \log n$) die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s};$$

unter n^s ist der auch für complexe s eindeutig bestimmte Werth $e^{s \log n}$ zu verstehen, wo $\log n$ den reellen Werth des Logarithmus bezeichnet. Die allgemeine *Dirichlet*sche Reihe (1.) kann auch in die Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{l_n^s}$$

gesetzt werden, wo die l_n positive mit n monoton ins Unendliche wachsende Grössen sind und l_n^s den Werth $e^{s \log l_n}$ hat.

Die *Dirichlet*sche Reihe wird in ihrem Convergenzbereiche als Function von s studirt, und es gelten folgende Fundamentalsätze*) I., II., III.:

I. Wenn die Reihe (1.) für $s = s_0$ convergirt, so convergirt sie für jedes s, dessen reeller Theil $\Re(s)$ grösser ist als $\Re(s_0)$.

Daraus folgt, dass, wenn eine *Dirichlet*sche Reihe für s_0 divergirt, sie für jedes s mit kleinerem reellen Theil divergirt. Es ergiebt sich also, dass der Convergenzbereich einer *Dirichlet*schen Reihe eine Halbebene ist, deren linke Begrenzung eine Parallele $\Re(s) = c$ zur Axe des Imaginären ist; c kann auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein, wie die stets divergente Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^s}$ und die überall convergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, n^s}$ illustriren.

Im Convergenzbereiche braucht die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ nicht unbedingt

*) Vergl. *Cahen*, „Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* et sur des fonctions analogues", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 11, 1894, S. 75 ff., wo diese Theorie zum ersten Male ausführlich vom Standpunkte der Theorie der Functionen complexen Argumentes aus behandelt worden ist. Es ist allerdings Herrn *Cahen* entgangen, dass der wichtige Satz I. schon bekannt war und von Herrn *Jensen* herrührt: „Om Raekkers Konvergens", Tidsskrift for Mathematik, 5. Reihe, Bd. 2, 1884, S. 70.



zu convergiren; fragt man nach dem Gebiete der unbedingten Convergenz, so kann man leicht beweisen, dass es gleichfalls eine Halbebene ist, welche links von einer Parallelen $\Re(s) = \gamma$ zur Axe des Imaginären begrenzt wird; diese Gerade fällt entweder (was für reelle positive a_n stets eintritt) mit der oben erwähnten Geraden $\Re(s) = c$ zusammen ($c = \gamma$), oder sie liegt rechts von ihr ($c < \gamma$) im Endlichen oder Unendlichen. Die Lage dieser beiden Geraden ist von Herrn *Cahen**) in analoger Form bestimmt worden wie der Radius des Convergenzkreises einer Potenzreihe vordem durch *Cauchy* und Herrn *Hadamard*; die Abscissen der Grenzgeraden sind, falls sie $\geqq 0$ sind,

$$c = \limsup_{x=\infty} \frac{\log |\sum\limits_{n=1}^{x} a_n|}{\lambda_x}, \qquad \gamma = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \sum\limits_{n=1}^{x} |a_n|}{\lambda_x}.$$

Wenn c und γ endlich und verschieden sind, wird durch $\Re(s) = c$ und $\Re(s) = \gamma$ die Ebene in zwei Halbebenen und einen zwischen ihnen liegenden Streifen**) eingetheilt, derart, dass, von links nach rechts gesehen, die Gebiete der Divergenz, der bedingten Convergenz und der unbedingten Convergenz auf einander folgen. Das Verhalten auf den Grenzgeraden bleibt unentschieden.

Es mögen an einigen Beispielen die wichtigsten der denkbaren Fälle erläutert werden:

1. Für $a_n = 1$, $\lambda_n = \log n$ erhält man die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$; hier ist

$$c = \gamma = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \sum\limits_{n=1}^{x} 1}{\log x} = \limsup_{x=\infty} 1 = 1;$$

links von $\Re(s) = 1$ divergirt die Reihe, rechts von $\Re(s) = 1$ convergirt sie absolut.

2. Für $a_n = (-1)^n$, $\lambda_n = \log n$, also für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$, ist:

$$c = \limsup_{x=\infty} \frac{\log |\sum\limits_{n=1}^{x} (-1)^n|}{\log x} = 0,$$

*) l. c. S. 87—89.

**) Die Breite $\gamma - c$ dieses Streifens ist nach Herrn *Cahen* (l. c. S. 92) höchstens $\limsup\limits_{x=\infty} \frac{\log x}{\lambda_x}$, für Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ also höchstens 1.

da $\sum_{n=1}^{x}(-1)^n$ nur der Werthe -1 und 0 fähig ist, und

$$\gamma = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{x} |(-1)^n|}{\log x} = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{x} 1}{\log x} = \limsup_{x=\infty} 1 = 1.$$

Hier findet Divergenz für $\Re(s) < 0$, bedingte Convergenz für $0 < \Re(s) < 1$, unbedingte Convergenz für $\Re(s) > 1$ statt.

3. Für $a_n = (-1)^n$, $\lambda_n = \log\log n$, also für die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^s}$, ist

$$c = \limsup_{x=\infty} \frac{\log |\sum_{n=2}^{x}(-1)^n|}{\log\log x} = 0,$$

$$\gamma = \limsup_{x=\infty} \frac{\log \sum_{n=2}^{x} |(-1)^n|}{\log\log x} = \limsup_{x=\infty} \frac{\log(x-1)}{\log\log x} = +\infty,$$

sodass die betrachtete Reihe nirgends unbedingt, aber in der Halbebene $\Re(s) > 0$ bedingt convergirt.

Ein anderer Fundamentalsatz ist:

II. Wenn c die Abscisse der Grenzgeraden ist und ε, T positive Grössen sind, so convergirt für $\Re(s) \geqq c+\varepsilon$, $-T \leqq \Im(s) \leqq T$*) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ gleichmässig.**)

Daraus folgt nach einem bekannten Satze von *Weierstrass*:***)

III. In der Convergenzhalbebene stellt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ eine analytische Function von s dar; diese ist für jeden Punkt s_0 jener Halbebene in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(s - s_0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (s - s_0)^\nu$$

entwickelbar, welche mindestens im Innern des Kreises mit dem Radius $\Re(s_0) - c$ convergirt.

Die Ableitungen der Function ergeben sich in der Convergenzhalbebene der *Dirichlet*schen Reihe durch gliedweise Differentiation derselben.

---

*) $\Im(s) \cdot i$ bezeichnet den imaginären Theil der Zahl $s = \Re(s) + \Im(s) \cdot i$.

**) *Cahen*, l. c., S. 83.

***) „Zur Functionenlehre", Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1880, S. 723; Abhandlungen aus der Functionenlehre, 1886, S. 73–74; Werke, Bd. 2, 1895, S. 205.

Dies sind die Grundzüge der bekannten allgemeinen Theorie der *Dirichlet*schen Reihen, welche mit der Theorie der Potenzreihen manche Analogieen bietet, aber wegen der nur bedingten Convergenz der Reihen noch schwieriger ist. Wie bei Potenzreihen fehlt hier eine allgemeine Methode zur Entscheidung darüber, ob die für $\Re(s) > c$ durch eine bestimmte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ dargestellte Function über die Grenzgerade hinaus fortsetzbar ist. Man hat den Nachweis — mit einer sogleich anzugebenden Ausnahme — für diejenigen speciellen *Dirichlet*schen Reihen geführt, mit denen man sich bisher hauptsächlich beschäftigt hat. Das sind die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, welche für $\Re(s) > 1$ die *Riemann*sche*) ζ-Function darstellt, ferner die von den Herren *Lipschitz***) und *Lerch****), in Specialfällen von den Herren *Kinkelin*****), *Hurwitz*†), *Piltz*††), *Cahen*†††) und *Mellin*††††) behandelte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{(w+n)^s} \qquad (\Re(x) \leq 0),$$

*) „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859, S. 671 ff.; Werke, 2. Aufl., 1892, S. 145 ff.

**) „Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 54, 1857, S. 313 ff.; „Untersuchung der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen", ebenda, Bd. 105, 1889, S. 127 ff.

***) „Note sur la fonction $\mathfrak{R}(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2k\pi i x}}{(w+k)^s}$", Acta mathematica, Bd. 11, 1887, S. 19 ff.; „Základové theorie Malmsténovských řad", Berichte der tschechischen Akademie der Wissenschaften, 2. Klasse, Bd. 1, No. 27, 1892, S. 525—590.

****) „Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlentheorie", Programm der Gewerbeschule in Basel, 1862.

†) „Einige Eigenschaften der *Dirichlet*schen Functionen $F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Classenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten", Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 27, 1882, S. 86 ff.

††) „Ueber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze", Habilitationsschrift, Jena, 1884.

†††) l. c.

††††) „Ueber eine Verallgemeinerung der *Riemann*schen Function $\zeta(s)$", Acta societatis scientiarum Fennicae, Bd. 24, 1899, No. 10.

$$(3.)\qquad \zeta_x(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}},$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft, und

$$(4.)\qquad \zeta_x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s},$$

wo $F(n)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen rationalen Zahl n als Norm eines Ideals $\mathfrak{n}$ des Körpers x ist.

Von den drei Ausdrücken (2.), (3.), (4.) ist bisher bekannt*), dass sie für reelle $s > 1$ (also für complexe s mit reellem Bestandtheil $\Re(s) > 1$) convergiren, und dass das Product $(s-1)\zeta_x(s)$, wenn die Variable s von rechts an $s = 1$ heranrückt, sich einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze nähert. Weitere Resultate über die für $\Re(s) > 1$ durch jene Ausdrücke (2.), (3.), (4.) definirte analytische Function sind nicht vorhanden; Herr *Hilbert***) machte noch jüngst auf diese Lücke aufmerksam.

Der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit enthält einen Hilfssatz über *Dirichlet*sche Reihen; im zweiten führe ich den Nachweis, dass die Function $\zeta_x(s)$ über die Grenzgerade $\Re(s) = 1$ hinaus an jeder Stelle fortsetzbar ist und dass abgesehen von dem Pole $s = 1$ keine Unendlichkeitsstelle, aber auch keine Nullstelle der Function auf der Grenzgeraden liegt. Auch wird ein links von der Grenzgeraden gelegenes Gebiet bestimmt, in dem die ζ_x-Function nicht verschwindet. Das Hauptresultat des dritten Abschnittes ist der Satz, dass das Product (3.) für jedes s mit dem reellen Theil 1 (ausser $s = 1$) convergirt und die ζ_x-Function darstellt; die hierzu angestellten Betrachtungen über gewisse auf die Primideale des Körpers erstreckte Summen bilden eine Ausdehnung der *Tschebyschef*schen Methoden auf die allgemeine Zahlentheorie. Im vierten Abschnitt werden diese arithmetischen, von der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen unabhängigen Betrachtungen zur Lösung eines Problems verwendet, das von Herrn *Poincaré* formulirt und für einen speciellen höheren Zahlkörper, den *Gauss*schen Körper $P(i)$ gelöst worden ist. Die Behandlung des Problems von der

*) *Dedekind*, l. c., S. 610—611; *Hilbert*, l. c. S. 230—232.

**) „Mathematische Probleme", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1900, S. 275—276; Archiv der Mathematik und Physik, Reihe 3, Bd. 1, 1901, S. 215.

existirt und gleich α ist, so convergirt

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n^s}$$

für $s > 1$, und

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

existirt und ist gleich α
hat sich eine ganze Reihe ähnlich beweisbarer Sätze angeschlossen, welche namentlich von *Berger**) und Herrn *Pringsheim***) entwickelt worden sind; einer jener Sätze, welcher von Herrn *Dedekind* herrührt***), lautet:

Nähert sich

$$\frac{1}{\log x} \sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n}$$

für $x = \infty$ der Grenze α, so convergirt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ für $s > 1$, und das Product

$$(s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

nähert sich für $s = 1$ einer Grenze und zwar der Grenze α.

Im einfachsten Falle $f(n) = 1$ lehrt also dieser Satz, dass in den zwei Gleichungen

(5.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\alpha}{s-1} + \beta + \gamma(s-1) + \delta(s-1)^2 + \cdots \qquad (\textit{Riemann})$$

und

(6.) $$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)^{\dagger)} \quad (\textit{Maclaurin-Euler}\text{sche Summenformel})$$

*) „Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres", Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis, Ser. 3, Bd. 14, 1887; vergl. auch *Franel*, „Sur la théorie des séries", Mathematische Annalen, Bd. 52, 1899, S. 538.

**) „Zur Theorie der *Dirichlet*schen Reihen", Mathematische Annalen, Bd. 37, 1890, S. 38—60.

***) l. c. S. 382; der Satz ist ein Specialfall des dort mit 4. bezeichneten.

†) $O(g(x))$ bezeichnet eine Function von x, deren Quotient durch die Function $g(x)$ für grosse positive x nicht beliebig grosser Werthe fähig ist, also zwischen endlichen Unbestimmtheitsgrenzen oscillirt, mögen dieselben verschieden sein oder in 0 oder einem anderen Werthe zusammenfallen. Eine Function $\psi(x)$ kann also mit $O\left(\frac{1}{x}\right)$

die beiden Constanten α und 1 übereinstimmen. Die meisten der oben erwähnten weiteren Untersuchungen bewegen sich nach der Richtung hin, dass über das Verhalten von $\sum_{n=1}^{x} f(n)$ oder von $\sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n}$ andere Voraussetzungen gemacht werden, z. B. die, dass der Quotient durch $x^a (\log x)^b$ sich einer Grenze nähert; dadurch gelingt es dann, das Anfangsglied von Potenz- und anderen Reihen zu bestimmen, welche nicht gerade wie die obige Reihe (5.) mit der (-1)ten Potenz von $s-1$ beginnen. Dagegen wird die bekannte Thatsache*), dass in (5.), (6.) auch die Coefficienten β und C übereinstimmen, wenig beachtet; dieser Satz, dass die beiden Grenzwerthe

$$\lim_{s=1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right)$$

und

$$\lim_{x=\infty} \left(\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log x\right)$$

übereinstimmen (ihre Existenz steht von vornherein fest), wird auch in neuerer Zeit nicht immer einfach genug nachgewiesen. Man gelangt leicht zu folgendem allgemeineren Satz:

Es werde die summatorische Function

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n)$$

der Function $f(n)$ zugleich mit x unendlich, und zwar so, dass

$$H(x) = \alpha x + O(g(x)) \tag{7.}$$

---

bezeichnet werden, wenn zwei Zahlen ξ, G so gefunden werden können, dass für alle $x \geqq \xi$

$$|x\psi(x)| \leqq G$$

ist. Das ist bekanntlich für

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log x - C$$

der Fall, wenn C die *Euler*sche Constante bezeichnet. Die Bezeichnungsweise $O(g(x))$ wird im Folgenden mitunter auch für complexe Functionen der positiven Variablen x angewendet; damit ist alsdann gemeint, dass der absolute Betrag des Quotienten durch die Function $g(x)$ für positive unendlich wachsende x endlich bleibt.

*) Vergl. *Piltz:* „Ueber das Gesetz, nach welchem die mittlere Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Produkte einer gegebenen Anzahl Faktoren mit der Grösse der Zahlen wächst.“ Inaugural-Dissertation, Berlin, 1881, S. 7.

ist, wo α *eine Constante bezeichnet und* $g(x)$ *eine positive Function von* x, *von der zweierlei vorausgesetzt wird:* $\frac{g(x)}{x^2}$ *nehme für* $x \geqq 1$ *mit wachsendem* x *monoton ab und*

$$\int_1^\infty \frac{g(t)\,dt}{t^2}$$

habe einen Sinn, d. h.

$$\lim_{x=\infty} \int_1^x \frac{g(t)\,dt}{t^2} \tag{8.}$$

existire.

Alsdann convergirt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *für* $\Re(s) > 1$ *und lässt sich in die Form setzen:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{\alpha}{s-1} + \beta + \{1\}^{*)}; \tag{9.}$$

ferner lässt sich $\sum\limits_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n}$ *folgendermassen abschätzen:*

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n} = \alpha \log x + \beta + \{1\}^{*)}, \tag{10.}$$

wo die Constanten α *und* β *mit den entsprechenden Constanten von* (9.) *übereinstimmen und* α *mit der in* (7.) *vorkommenden Constanten.*

Zum Beweise dieses für das Folgende erforderlichen Hilfssatzes führt der von *Abel* herrührende Kunstgriff der partiellen Summation. Es ist

$$\begin{aligned} f(n) = H(n) - H(n-1) &= \alpha n + \gamma_n - \alpha(n-1) - \gamma_{n-1} \\ &= \alpha + \gamma_n - \gamma_{n-1}{}^{**)}, \end{aligned}$$

wo

$$\gamma_n = O(g(n))$$

ist. γ_n ist für jedes n eine wohlbestimmte Grösse, nämlich $H(n) - \alpha n$, deren Quotient durch $g(n)$ dem absoluten Werthe nach für alle n kleiner ist als eine Constante G.

Für diejenigen s, für welche die linke Seite convergirt, ist also

---

*) $\{\varphi(x)\}$ bezw. $\{\varphi(s)\}$ bezeichne eine Function von x bezw. s, deren Quotient durch $\varphi(x)$ bezw. $\varphi(s)$ sich der Grenze 0 nähert, falls x ins positive Unendliche wächst bezw. s auf der Axe des Reellen von rechts an 1 heranrückt; $\{1\}$ bedeutet also in (10.) bezw. (9.) eine Function von x bezw. s, deren limes für $x = \infty$ bezw. für $s = 1$ existirt und 0 ist.

**) γ_0 bezeichne 0.

Nun ist für alle $n \geqq 1$

$$|\gamma_n| \leqq G g(n),$$

also

$$\left|\sum_{n=x}^{y} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n}\right| \leqq G \sum_{n=x}^{y} \frac{g(n)}{n^2} + G\frac{g(x-1)}{x} + G\frac{g(y)}{y+1}.$$

Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^2}$ convergirt, wie oben bemerkt wurde, und $\frac{g(n)}{n}$ nähert sich für $n = \infty$ der Grenze 0; daher ist

$$\lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} G \sum_{n=x}^{y} \frac{g(n)}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} G \frac{g(x-1)}{x} = G \lim_{x=\infty} \frac{g(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x} = 0,$$

$$\lim_{y=\infty} G \frac{g(y)}{y+1} = G \lim_{y=\infty} \frac{g(y)}{y} \frac{y}{y+1} = 0,$$

also

$$\lim_{\substack{x=\infty \\ y=\infty}} \sum_{n=x}^{y} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n} = 0,$$

was die behauptete Convergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n}$ darthut.

Wenn nun aber eine *Dirichlet*sche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ in einem Punkte s_0 convergirt, so ist bekanntlich, auch wenn s_0 auf der Grenzgeraden liegt, für positive gegen 0 abnehmende ε*)

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(s_0+\varepsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s_0}.$$

Also nähert sich, wenn s auf der Axe des Reellen an 1 heranrückt, die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^s}$ dem Summenwerthe der convergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n}$, den ich mit $\beta - \alpha C$ bezeichnen will, wo C die *Euler*sche, α die in (7.) auftretende Constante bezeichnet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^s} = \beta - \alpha C + \{1\}.$$

---

*) Sogar für $s = s_0 + a + bi$ $(a > 0, b \gtreqless 0)$, wo a und b so Null werden, dass $\frac{b}{a}$ endlich bleibt; vergl. *Cahen*, l. c., S. 86—87.

Dies giebt, in (12.) eingesetzt, den ersten Theil der Behauptung

$$(9.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\frac{\alpha}{s-1}+\beta+\{1\}.$$

Hierin ist α die Constante der Voraussetzung (7.) und

$$\beta=\alpha C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n-\gamma_{n-1}}{n}.$$

Andererseits ist

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{f(n)}{n}=\sum_{n=1}^{x}\frac{\alpha+\gamma_n-\gamma_{n-1}}{n}=\alpha\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{x}\frac{\gamma_n-\gamma_{n-1}}{n}$$

$$=\alpha(\log x+C+\{1\})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n-\gamma_{n-1}}{n}-\sum_{n=x+1}^{\infty}\frac{\gamma_n-\gamma_{n-1}}{n}$$

$$=\alpha\log x+\alpha C+\{1\}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n-\gamma_{n-1}}{n}+\{1\},$$

$$(10.)\qquad \sum_{n=1}^{x}\frac{f(n)}{n}=\alpha\log x+\beta+\{1\},$$

wo α und β denselben Werth haben wie in (9.)

Damit ist der Satz auf S. 73–74 bewiesen; seine Voraussetzungen sind im besonderen erfüllt, wenn

$$g(x)=x^m$$

ist, wo m eine positive Zahl <1 bezeichnet; denn alsdann nimmt

$$\frac{g(x)}{x^2}=\frac{1}{x^{2-m}}$$

mit wachsendem x ab und

$$\int_1^{\infty}\frac{g(t)}{t^2}\,dt=\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^{2-m}}=\frac{1}{1-m}$$

hat einen Sinn. In diesem Falle besteht ausser dem Satze auf S. 73–74 noch folgender analog beweisbare Satz:

Ist

$$(13.)\qquad H(x)=\sum_{n=1}^{x}f(n)=\alpha x+O(x^m),\qquad (0<m<1)$$

so ist die für $\Re(s)>1$ *durch die Dirichletsche Reihe*

$$(14.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

dargestellte analytische Function über die Grenzgerade $\Re(s)=1$ *hinaus in der Umgebung jeder Stelle* $s=1+ti$ *fortsetzbar; sie existirt mindestens in der Halbebene* $\Re(s)>m$ *und hat in dieser Halbebene als einzige Singularität die Stelle* $s=1$, *welche ein Pol erster Ordnung ist.*

Beweis: Es ist für $\Re(s) > 1$ wie oben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^s}.$$

Wie bekannt, ist die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ definirte Function $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene fortsetzbar und hat (im Endlichen) den Pol erster Ordnung $s = 1$ als einzige Singularität. Die Behauptungen werden also bewiesen sein, wenn die Convergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^s}$ für jedes reelle $s > m$ dargethan sein wird; denn daraus folgt nach dem Fundamentalsatz III*), dass diese Reihe für $\Re(s) > m$ eine eindeutige analytische Function ohne Singularität im Endlichen darstellt. Es ist für

$$s = m + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \qquad x \leqq y:$$

$$\sum_{n=x}^{y} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^s} = \sum_{n=x}^{y} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^{m+\varepsilon}} = \sum_{n=x}^{y} \gamma_n \left(\frac{1}{n^{m+\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{m+\varepsilon}}\right) - \frac{\gamma_{x-1}}{x^{m+\varepsilon}} + \frac{\gamma_y}{(y+1)^{m+\varepsilon}}.$$

Da für eine passend gewählte Constante G wegen (13.)

$$|\gamma_n| \leqq G n^m$$

ist, ergiebt sich

$$(15.) \quad \left|\sum_{n=x}^{y} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^{m+\varepsilon}}\right| \leqq G \sum_{n=x}^{y} n^m \left(\frac{1}{n^{m+\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{m+\varepsilon}}\right) + G \frac{(x-1)^m}{x^{m+\varepsilon}} + G \frac{y^m}{(y+1)^{m+\varepsilon}}.$$

Die beiden letzten Glieder verschwinden für $x = \infty$, $y = \infty$; ferner ist

$$0 < \frac{1}{n^{m+\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{m+\varepsilon}} = (m+\varepsilon) \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{m+\varepsilon+1}} < \frac{m+\varepsilon}{n^{m+\varepsilon+1}} \text{**)},$$

$$0 < G \sum_{n=x}^{y} n^m \left(\frac{1}{n^{m+\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{m+\varepsilon}}\right) < G(m+\varepsilon) \sum_{n=x}^{y} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}};$$

also verschwindet wegen der Convergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ auch das erste Glied der rechten Seite von (15.) für $x = \infty$, $y = \infty$. Aus (15.) folgt somit die Convergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^{m+\varepsilon}}$ und damit der auf S. 77 ausgesprochene **Satz.**

In der Umgebung jeder von 1 verschiedenen Stelle s, deren reeller Teil $> m$ ist, ist also die für $\Re(s) > 1$ durch die *Dirichlet*sche Reihe (14.) definirte Function $\psi(s)$ in eine Potenzreihe entwickelbar, die mindestens in

*) S. 67.

**) Dies folgt auch aus dem binomischen Satze.

einem Kreise convergirt, dessen Radius die kleinere der beiden Zahlen $\Re(s) - m$ und $|s-1|$ ist; alsdann reicht ja der Kreis weder über die Gerade $\Re(s) = m$ hinaus, noch enthält er den Pol $s = 1$. In der Umgebung des Punktes $s = 1$ giebt es eine mindestens für $|s-1| < 1 - m$ convergente Entwicklung

$$(16.)\qquad \psi(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \beta + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu (s-1)^\nu.$$

Ein Theil dieses letzteren, auf die Umgebung des Punktes $s = 1$ bezüglichen Resultates kann auch aus einem Satze des Herrn *Phragmén**) hergeleitet werden, welcher so lautet: Es seien $l_1, l_2, \dots l_n, \dots$ positive mit n monoton ins Unendliche wachsende Grössen, $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ beliebige reelle Constanten, und es werde über die summatorische Function

$$H(x) = \sum_{l_n \leqq x} a_n \text{**)}$$

vorausgesetzt, dass

$$H(x) = \alpha x + O(x^m) \qquad (0 < m < 1)$$

ist; dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{l_n^s} - \frac{\alpha}{s-1}$$

in eine nach ganzen positiven Potenzen von $s-1$ fortschreitende Reihe entwickelbar, welche mindestens für $|s-1| < \frac{1-m}{2}$ convergirt. Für $l_n = n$, $a_n = f(n)$ folgt aus diesem Satze des Herrn *Phragmén* allerdings, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ über die Grenzgerade $\Re(s) = 1$ an gewissen Stellen fortgesetzt werden kann; aber diese Fortsetzbarkeit folgt aus jenem Satze nur für die endliche Strecke $1 - \frac{1-m}{2} i$ bis $1 + \frac{1-m}{2} i$ der Grenzgeraden, während der im Texte bewiesene Satz für jede Stelle der Grenzgeraden gilt; ausserdem habe ich für die Stelle $s = 1$ oben bewiesen, dass der Convergenzkreis der Reihe (16.) mindestens den Radius $1 - m$ hat, während der *Phragmén*sche Satz nur liefert, dass der Radius mindestens $\frac{1-m}{2}$ ist.

---

*) „Sur un théorème de *Dirichlet*". Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. 49, 1892, S. 199—206.

**) n durchläuft alle (nach Voraussetzung in endlicher Anzahl vorhandenen) ganzen Zahlen, für welche $l_n \leqq x$ ist.

An Stelle von (9.) tritt also unter den Voraussetzungen des Satzes auf S. 77 in der Umgebung der Stelle $s = 1$ die mindestens für $|s-1| < 1-m$ convergente Entwicklung (16.), und an Stelle von (10.) tritt wegen

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n} = -\frac{\gamma_x}{x+1} + \sum_{n=x+1}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{O(x^m)}{x+1} + \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{O(n^m)}{n^2} = O\left(\frac{1}{x^{1-m}}\right) + O\int_x^{\infty} \frac{dt}{t^{2-m}} = O\left(\frac{1}{x^{1-m}}\right)$$

die schärfere Relation

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n} = \alpha \log x + \beta + O\left(\frac{1}{x^{1-m}}\right). \tag{17.}$$

Zweiter Abschnitt.

Ueber die zu einem beliebigen algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction.

Es sei ein algebraischer Zahlkörper $\varkappa$ allen Betrachtungen dieses und der drei folgenden Abschnitte zu Grunde gelegt, und es bezeichne wie in der Einleitung*) $F(n)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen rationalen Zahl n als Norm eines Ideals des Körpers. Dann ist nach Herrn *Dedekind***)

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x} F(n) = \alpha x + \{x\},$$

wo α eine durch den Körper bestimmte Constante

$$\alpha = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2} R h}{w\,|\sqrt{D}|} \tag{18.}$$

ist; hierin bedeutet r_1 die Anzahl der reellen conjugirten Körper, r_2 die Anzahl der imaginären conjugirten Körperpaare, w die Anzahl der im Körper vorkommenden Einheitswurzeln, D die Discriminante, R den Regu-

*) S. 70.

**) l. c. S. 609 und 611; vergl. *Hilbert*, l. c. S. 229 und 230.

In dem Gebiete $\Re(s) > 1$, in welchem die ζ_x-Function durch eine der Reihen (2.), (4.) oder durch das Product (3.) dargestellt wird, hat sie keine Nullstelle, da ja bekanntlich das Product (3.) für jedes s, dessen reeller Theil > 1 ist, convergirt, d. h. so beschaffen ist, dass das Product seiner x ersten Factoren sich für $x = \infty$ einer endlichen, von 0 verschiedenen Grenze nähert.

Nachdem durch den Satz auf S. 81 die Fortsetzbarkeit der ζ_x-Function über die Grenzgerade hinaus dargethan ist, stellt sich die Frage nach den etwaigen Nullstellen der ζ_x-Function, deren reelle Theile ≤ 1 wären. In dieser Beziehung werde ich zunächst beweisen:

Die Function $\zeta_x(s)$ hat auf der Geraden $\Re(s) = 1$ keine Nullstelle.

Beweis: Für die gewöhnliche, dem natürlichen Rationalitätsbereich entstammende *Riemann*sche ζ-Function ist dieser Satz bekannt und zuerst 1896 unabhängig von den Herren *Hadamard**) und *de la Vallée-Poussin***) bewiesen worden. Von jenen beiden Beweisen ist der *Hadamard*sche der kürzere; er ist aber später von Herrn *de la Vallée-Poussin****) noch vereinfacht worden. Herr *Hadamard*†) betont, dass sein Beweis nicht nur für die ζ-Function gilt, sondern allgemeiner zu dem Satze führt:

Wenn eine Function so beschaffen ist, dass erstens ihr Logarithmus in eine für $\Re(s) > c$ convergente *Dirichlet*sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

entwickelt werden kann, wo die a_n reell und positiv sind, und dass zweitens die Function in der Umgebung jeder Stelle der Geraden $\Re(s) = c$ über dieselbe hinaus fortgesetzt werden kann und auf dieser Geraden als einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle einen Pol erster Ordnung besitzt, so besitzt sie auf der Grenzgeraden $\Re(s) = c$ keine Nullstelle.

*) l. c. S. 200—202.

**) l. c. S. 220—242.

***) l. c. S. 395—397; vergl. Herrn *von Schapers* Dissertation „Ueber die Theorie der *Hadamard*schen Functionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen", Göttingen, 1898, S. 63—68, wo die drei Beweise besprochen und mit einander verglichen werden.

†) l. c. S. 202.

(Aus den gemachten Realitätsannahmen folgt natürlich sofort, dass jener Pol gerade die Stelle $s = c$ sein muss, da anderenfalls der zu $c + ti$ conjugirte Punkt $c - ti$ auch ein Pol wäre.)

Für den vorliegenden Fall

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}$$

ist die Richtigkeit der zweiten Voraussetzung im Vorhergehenden durch den Satz auf S. 81 schon nachgewiesen. Es bleibt nur zu zeigen, dass die erste über den Logarithmus gemachte Voraussetzung erfüllt ist. Dies sieht man folgendermassen ein: Es ist nach (3.) für $\Re(s) > 1$

$$\zeta_\varkappa(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}},$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers $\varkappa$ durchläuft, also

$$\log \zeta_\varkappa(s) = -\sum_{\mathfrak{p}} \log\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} + \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{3s}} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \log n},$$

wo a_n die Anzahl der Darstellungen von n als Norm eines Primideals plus der halben Anzahl der Darstellungen von n als Norm eines Primidealquadrats $+ \cdots$ ist; a_n ist also eine reelle nicht negative Zahl (die natürlich nur dann von 0 verschieden, d. h. positiv sein kann, wenn n eine Primzahlpotenz ist).

Der *Hadamard*sche, auf der vorigen Seite citirte Satz ist also anwendbar; übrigens gilt auch die *de la Vallée-Poussin*sche Vereinfachung des *Hadamard*schen Beweises von

$$\zeta(1 + ti) \neq 0 \qquad (t \lessgtr 0)$$

für die allgemeineren *Hadamard*schen Voraussetzungen und liefert für den vorliegenden Fall folgenden Beweis des Satzes

$$\zeta_\varkappa(1 + ti) \neq 0 \qquad (t \lessgtr 0).$$

Gesetzt es wäre

$$\zeta_\varkappa(1 + ti) = 0.$$

Dann hätte die $\zeta_\varkappa$-Function in der Umgebung der Stelle $1 + ti$ eine

Entwicklung

$$\zeta_x(s) = c_1(s-1-ti)+c_2(s-1-ti)^2+\cdots+c_n(s-1-ti)^n+\cdots.$$

Hier lässt sich zunächst zeigen, dass $c_1 \neq 0$, d. h. dass die Nullstelle $1+ti$ von der ersten Ordnung wäre. In der That ist für $\Re(s)>1$:

$$\log\zeta_x(s) = \log \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}} = -\sum_{\mathfrak{p}} \log\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right),$$

$$\frac{d\log\zeta_x(s)}{ds} = \frac{\zeta_x'(s)}{\zeta_x(s)} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s-1},$$

$$(21.)\qquad \frac{\zeta_x'(s)}{\zeta_x(s)} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} - \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s(N\mathfrak{p}^s-1)}.$$

Nun ist $s=1$ ein Pol erster Ordnung der Function $\zeta_x(s)$; daher ist bei jeder Annäherung an $s=1$

$$\lim_{s=1}(s-1)\frac{\zeta_x'(s)}{\zeta_x(s)} = -1.$$

Im besonderen werde die Annäherung

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\zeta_x'(1+\varepsilon)}{\zeta_x(1+\varepsilon)}$$

gewählt, wo ε eine Folge positiver unendlich abnehmender Werthe durchläuft. Wegen $\Re(1+\varepsilon) = 1+\varepsilon > 1$ ist alsdann die Formel (21.) anwendbar und ergiebt

$$1 = \lim_{\varepsilon=0}\left(\varepsilon\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} + \varepsilon\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}(N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}-1)}\right),$$

oder, da

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s(N\mathfrak{p}^s-1)}$$

offenbar schon für $\Re(s)>\frac{1}{2}$, also gewiss für $s=1$ convergirt,

$$(22.)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\varepsilon\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} = 1.$$

Ebenso wäre, da (21.) für $s = 1+\varepsilon+ti$ $(\varepsilon>0)$ gilt, die Ordnung λ der Nullstelle $1+ti$ durch den Grenzwerth gegeben:

$$\lambda = \lim_{s=1+ti} (s-1-ti)\frac{\zeta_x'(s)}{\zeta_x(s)}$$

$$= -\lim_{\varepsilon=0}\left(\varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}} + \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}(N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}-1)}\right),$$

$$\lambda = -\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}}. \tag{23.}$$

Nun ist aber

$$\left|\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}}\right| \leqq \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{|N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}|} = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}},$$

also

$$\left|\varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}}\right| \leqq \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}};$$

in Verbindung mit (22.) und (23.) folgt daraus

$$\lambda = -\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}} = \lim_{\varepsilon=0} \left|\varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}}\right| \leqq \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} = 1,$$

so dass die etwaige Nullstelle λ-ter Ordnung $1+ti$ höchstens von der ersten Ordnung sein könnte. Es wäre also

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}} = -1.$$

Dies giebt, zu (22.) addirt,

$$0 = \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}\left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} (1 + N\mathfrak{p}^{-ti}).$$

Es ist im Auge zu behalten, dass ε von reellen positiven Werthen aus der Null zustrebt. In der letzten Gleichung muss der reelle Theil für sich gegen Null convergiren:

$$0 = \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} \big(1 + \cos(t \log N\mathfrak{p})\big).$$

Jeder Summand ist $\geqq 0$; der limes der mit ε multiplicirten Summe muss also auch dann Null sein, wenn zuvor jeder Summand mit einer zwischen 0 (incl.) und 4 (incl.) liegenden Zahl $2\,(1-\cos(t \log N\mathfrak{p}))$ multiplicirt wird; dies ergiebt wegen

$$2\,(1+\cos\alpha)\,(1-\cos\alpha) = 2 - 2\cos^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha: \tag{24.}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} \big(1 - \cos(2t \log N\mathfrak{p})\big) = 0.$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von (22.) folgt:

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} \cos(2t \log N\mathfrak{p}) = 1,$$

$$(25.) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \Re \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+2ti}} = 1.$$

Andererseits ist aber $1+2ti$ eine reguläre Stelle der Function $\zeta_x(s)$, da ja 1 die einzige auf $\Re(s) = 1$ gelegene Singularität ist; also ist, wenn sie keine Nullstelle ($\nu = 0$) oder eine Nullstelle ν-ter Ordnung ($\nu > 0$)*) ist,

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+2ti}} = -\nu \leqq 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \Re \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+2ti}} \leqq 0;$$

was mit (25.) im Widerspruch steht. Durch diese Uebertragung der bekannten *Hadamard-de la Vallée-Poussin*schen Methode ist bewiesen, dass die ζ_x-Function auf der Grenzgeraden nicht verschwindet, wie auf S. 82 behauptet wurde.

Herr *Mertens***) hat jenen Beweis für das Nichtverschwinden der *Riemann*schen ζ-Function auf der Grenzgeraden so umgestaltet, dass er zugleich eine bestimmte positive Function $\tau(t)$ der reellen, von 0 verschiedenen Variabeln t liefert, so dass für alle $t \gtrless 0$

$$|\zeta(1+ti)| > \tau(t)$$

ist.

Dieser Kunstgriff ist auch für die allgemeine ζ_x-Function unter Hinzuziehung einiger im Vorangegangenen angestellten Betrachtungen anwendbar und liefert zunächst

Für $\varepsilon > 0$ ist:

$$2 \log \zeta_x(1+\varepsilon+ti) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon+ti)}},$$

$$2 \log \zeta_x(1+\varepsilon-ti) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon-ti)}},$$

$$4 \log \zeta_x(1+\varepsilon) \quad = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}};$$

---

*) $\nu \geqq 2$ wäre nach dem oben Bewiesenen undenkbar; aber darauf kommt es hier nicht mehr an.

**) „Ueber eine Eigenschaft der *Riemann*schen ζ-Function", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 107, Abth. 2ª, 1898, S. 1431—1436.

durch Addition dieser drei Gleichungen ergiebt sich

$$4\log|\zeta_x(1+\varepsilon+ti)|+4\log\zeta_x(1+\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{4(1+\cos(mt\log N\mathfrak{p}))}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}};$$

wegen

$$4(1+\cos\alpha)\geqq 2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=1-\cos 2\alpha\text{*)}$$

folgt daraus die Ungleichung

$$4\log|\zeta_x(1+\varepsilon+ti)|+4\log\zeta_x(1+\varepsilon)\geqq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1-\cos(2mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\cos(2mt\log N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^{m(1+\varepsilon)}}$$

$$=\log\zeta_x(1+\varepsilon)-\log|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)|,$$

$$4\log|\zeta_x(1+\varepsilon+ti)|\geqq-3\log\zeta_x(1+\varepsilon)-\log|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)|,$$

$$(26.)\qquad |\zeta_x(1+\varepsilon+ti)|\geqq\frac{1}{(\zeta_x(1+\varepsilon))^{\frac{3}{4}}\,|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Analog dem *Mertens*schen Verfahren für die *Riemann*sche ζ-Function führt diese Ungleichung zu dem erstrebten Ziele nach Lösung der folgenden drei Hilfsaufgaben**):

1. Bestimmung einer oberen Schranke***) für $\zeta_x(1+\varepsilon)$, welche für $\varepsilon=0$ nicht stärker unendlich wird als $\frac{1}{\varepsilon}$.

2. Bestimmung einer von ε $(0\leqq\varepsilon\leqq 1)$ unabhängigen oberen Schranke für $|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)|$. Es wird eine positive Function von t gesucht, welche gleichmässig für alle ε zwischen 0 und 1 oberhalb $|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)|$ liegt.

3. Bestimmung einer von ε $(0<\varepsilon\leqq 1)$ unabhängigen oberen Schranke für $\left|\frac{1}{\varepsilon}\left(\zeta_x(1+\varepsilon+ti)-\zeta_x(1+ti)\right)\right|$.

Aus einem nachher ersichtlichen Grunde werde ich mich bei der Lösung der dritten Hilfsaufgabe nicht auf positive ε beschränken, sondern sie für das Intervall

$$(27.)\qquad -\psi(t)\leqq\varepsilon\leqq 1 \qquad \text{(excl. } \varepsilon=0)$$

*) Vergl. (24.).

**) Bei diesen Untersuchungen genügt es wegen $|\zeta_x(\sigma+ti)|=|\zeta_x(\sigma-ti)|$, positive Werthe von t zu betrachten.

***) Unter oberer Schranke ist eine für keinen Werth der Variabeln überschrittene Zahl zu verstehen, die also auch durch jede grössere Zahl ersetzt werden kann.

behandeln, wo

$$\psi(t) = \frac{1}{k\log(3+t)};$$

k bezeichnet den Grad des Körpers $\varkappa$; alsdann ist thatsächlich für alle $t \geqq 0$:

$$\Re(1+\varepsilon+ti) = 1+\varepsilon \geqq 1-\psi(t) = 1-\frac{1}{k\log(3+t)} > 1-\frac{1}{k},$$

so dass $\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)$ einen Sinn hat.

1. Es ist für $\varepsilon > 0$

$$\zeta_\varkappa(1+\varepsilon) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Nach (19.) ist

$$|H(x)-\alpha x| = \left|\sum_{n=1}^{x} F(n)-\alpha x\right| < gx^{1-\frac{1}{k}},$$

wo g eine von x unabhängige durch den Körper bestimmte Constante bezeichnet. Dies ergiebt

$$\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)-\alpha\zeta(1+\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H(n)-H(n-1)}{n^{1+\varepsilon}}-\frac{\alpha}{n^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H(n)-\alpha n)-(H(n-1)-\alpha\cdot(n-1))}{n^{1+\varepsilon}} = \sum_{n=1}^{\infty}(H(n)-\alpha n)\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}\right),$$

$$|\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)-\alpha\zeta(1+\varepsilon)| < g\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}\right) < g\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}}\cdot\frac{1+\varepsilon}{n^{2+\varepsilon}}$$

$$= g(1+\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}+\varepsilon}} < g(1+\varepsilon)\zeta\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

$$\zeta_\varkappa(1+\varepsilon) \leqq |\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)-\alpha\zeta(1+\varepsilon)|+\alpha\zeta(1+\varepsilon)$$

$$< g(1+\varepsilon)\zeta\left(1+\frac{1}{k}\right)+\alpha\zeta(1+\varepsilon);$$

wegen

$$\zeta(1+\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < 1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = 1+\frac{1}{\varepsilon}$$

ist also

$$\zeta_\varkappa(1+\varepsilon) < g(1+\varepsilon)\zeta\left(1+\frac{1}{k}\right)+\alpha+\frac{\alpha}{\varepsilon} = \left(g\varepsilon(1+\varepsilon)\zeta\left(1+\frac{1}{k}\right)+\alpha(1+\varepsilon)\right)\frac{1}{\varepsilon}.$$

Wird die Veränderlichkeit von ε auf positive Werthe $\leqq 1$ beschränkt, so giebt es also eine Constante*)

$$c_1 = 2g\zeta\left(1+\frac{1}{k}\right)+2\alpha,$$

*) Die Existenz einer solchen Constanten c_1 folgt auch schon aus dem auf S. 70 citirten *Dedekind*schen Satze.

so dass für $0 < \varepsilon \leqq 1$

$$(28.) \qquad \zeta_x(1+\varepsilon) < \frac{c_1}{\varepsilon}$$

ist.

2. Auch bei der zweiten Aufgabe wird die entsprechende Untersuchung für die *Riemann*sche ζ-Function als Hilfsmittel hinzugezogen werden. Dabei kann für $|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|$ die von Herrn *Mertens**) hergeleitete obere Schranke verwendet werden, eine wesentlich positive Function von t, die für $t = 0$ von der Grössenordnung $\frac{1}{t}$ und für $t = \infty$ von der Grössenordnung $\frac{e^{\pi t}}{\sqrt{t}}$ unendlich wird. Doch lässt sich die Abschätzung verschärfen. Aus der für $\Re(s) > 0$ gültigen Gleichung

$$(29.) \qquad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

hat Herr *de la Vallée-Poussin***) in besonders einfacher Weise die Fortsetzbarkeit der *Riemann*schen ζ-Function über die Grenzgerade hinaus geschlossen, weil die Integralsumme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

für $\Re(s) > \delta$ (δ bezeichnet eine positive Zahl) gleichmässig convergirt; (29.) lehrt, dass für $s = 1+\varepsilon+2ti$ $(0 \leqq \varepsilon \leqq 1)$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1 \cdot du}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ist, was

$$|\zeta(1+\varepsilon+2ti)| \leqq 1 + \frac{1}{|\varepsilon+2ti|} + |1+\varepsilon+2ti| \frac{\pi^2}{6} < 1 + \frac{1}{2t} + (2+2t)\frac{\pi^2}{6} = O(t)$$

ergiebt. Ein noch schärferes Resultat, nämlich

$$(30.) \qquad |\zeta(1+\varepsilon+2ti)| = O(\log t)$$

*) l. c., S. 1433—1434.

**) „Démonstration simplifiée du théorème de *Dirichlet* sur la progression arithmétique", Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie royale de Belgique, Bd. 53, 1896, S. 6—7; „Recherches etc." (vergl. S. 69, Anm. 4), S. 3—4.

hat Herr *Mellin**) erhalten, indem er in der gleichfalls für $\Re(s) > 0$ gültigen Gleichung**)

$$(31.)\ \zeta(s) = 1+\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)+\frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

die Summe in zwei durch $n = [|s|]$ geschiedene Theile zerlegte. Der *Mellin*sche Satz, an dem das Merkwürdige gerade in dem Verhalten auf der Grenzgeraden, d. h. in der Relation

$$|\zeta(1+2ti)| = O(\log t)^{***})$$

liegt, kann durch gleichzeitige Benutzung von (29.) und (31.) folgendermassen hergeleitet werden: Es ist

$$\zeta(s) = 1+\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{[t]}\left(\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)+\frac{1}{(n+1)^s}\right)-s\sum_{n=[t]+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$= 1+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{([t]+1)^{s-1}}-1\right)+\sum_{n=1}^{[t]}\frac{1}{(n+1)^s}-s\sum_{n=[t]+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{([t]+1)^{s-1}}+\sum_{n=1}^{[t]+1}\frac{1}{n^s}-s\sum_{n=[t]+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

$$|\zeta(1+\varepsilon+2ti)| \leqq \frac{1}{|\varepsilon+2ti|}\,\frac{1}{([t]+1)^{\varepsilon}}+\sum_{n=1}^{[t]+1}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}+\sqrt{(1+\varepsilon)^2+4t^2}\sum_{n=[t]+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}$$

$$(32.)\qquad < \frac{1}{2t}+\sum_{n=1}^{[t]+1}\frac{1}{n}+(2+2t)\sum_{n=[t]+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$= O\left(\frac{1}{t}\right)+O(\log t)+tO\int_t^{\infty}\frac{du}{u^2}$$

$$= O(\log t)+tO\left(\frac{1}{t}\right) = O(\log t) \qquad (0\leqq\varepsilon\leqq 1).$$

Nun ist für $\Re(s) > 1-\frac{1}{k}$, a fortiori also für $\Re(s) \geqq 1$

$$\zeta_x(s)-\alpha\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{F(n)}{n^s}-\frac{\alpha}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{[t^k]}\left(\frac{F(n)}{n^s}-\frac{\alpha}{n^s}\right)+\sum_{n=[t^k]+1}^{\infty}\frac{F(n)-\alpha}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{[t^k]}\frac{F(n)}{n^s}-\alpha\sum_{n=1}^{[t^k]}\frac{1}{n^s}+\sum_{n=[t^k]+1}^{\infty}\frac{H(n)-\alpha n-(H(n-1)-\alpha\cdot(n-1))}{n^s}$$

$$(33.) = \sum_{Nn=1}^{[t^k]}\frac{1}{N\mathfrak{n}^s}-\alpha\sum_{n=1}^{[t^k]}\frac{1}{n^s}+\sum_{n=[t^k]+1}^{\infty}(H(n)-\alpha n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)-\frac{H([t^k])-\alpha[t^k]}{([t^k]+1)^s},$$

---

*) l. c. (vergl. S. 69, Anm. 1), S. 48—49.

**) Diese Gleichung entsteht aus (29.) durch Ausführung der Integration und ist unabhängig von den Herren *Kinkelin* (l. c., S. 8), *Piltz* (l. c. — vergl. S. 68, Anm. 6 — S. 17) und *Jensen* (l. c. — vergl. S. 69, Anm. 2 — S. 1156) aufgefunden worden.

***) Nur mit Rücksicht auf die hier zu machende Anwendung ist $s = 1+2ti$ gesetzt; natürlich ist diese Relation mit $|\zeta(1+ti)| = O(\log t)$ gleichbedeutend.

also wegen

$$|H(n)-\alpha n| < g n^{1-\frac{1}{k}},\ \Re(s) \geqq 1:$$

$$|\zeta_x(s)-\alpha\zeta(s)| < \sum_{Nn=1}^{[t^k]} \frac{1}{Nn} + \alpha \sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{1}{n} + g \sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}} \left| s \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} \right| + \frac{g\,[t^k]^{1-\frac{1}{k}}}{[t^k]}.$$

Hierin ist nach (20.) das erste Glied der rechten Seite $= O(\log(t^k)) = O(\log t)$; dasselbe gilt vom zweiten Glied; das dritte Glied ist

$$\leqq g \sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}} |s| \int_n^{n+1} \frac{du}{u^s} < g\,|1+\varepsilon+2ti| \sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}} \frac{1}{n^s}$$

$$= O\left(t \int_{t^k}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\frac{1}{k}}}\right) = O\left(\frac{t}{t^{k\cdot\frac{1}{k}}}\right) = O(1)$$

und das vierte $= O\left(\frac{1}{t}\right)$. Es ergiebt sich also

$$|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti) - \alpha\zeta(1+\varepsilon+2ti)| = O(\log t)$$

und daraus in Verbindung mit (30.)

$$|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)| \leqq |\zeta_x(1+\varepsilon+2ti) - \alpha\zeta(1+\varepsilon+2ti)| + \alpha|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|$$
$$= O(\log t) + O(\log t) = O(\log t).$$

Für $t=\infty$ bleibt also $\frac{|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)|}{\log t}$ endlich; mit Rücksicht auf (32.) kann hierfür eine für alle $t>0$ gültige Ungleichung

(34.) $$|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)| < c_2\left(\frac{1}{t}+\log t\right) \qquad (t>0,\ 0\leqq \varepsilon \leqq 1)$$

geschrieben werden, wo c_2 eine nur vom Körper abhängige Constante bezeichnet*).

3. Es ist für alle ε, die (27.) erfüllen,

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\left(\zeta_x(1+\varepsilon+ti) - \zeta_x(1+ti)\right)\right|$$

kleiner als das Maximum von $\zeta_x'(s)$ auf der geradlinigen Strecke von $1-\psi(t)+ti$ bis $2+ti$. Nun ist für diese s

$$\zeta_x(s) - \alpha\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^s},$$

wo

$$\gamma_n = H(n) - \alpha n,\ |\gamma_n| < g n^{1-\frac{1}{k}};$$

*) Die Function $\frac{1}{t}+\log t$ ist nämlich für positive t stets einerseits $\geqq \frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{e}\right) > \frac{1}{2t}$, andrerseits $> \log t$.

also, wenn nach der Differentiation $s = \sigma + ti$ gesetzt und die Summe in zwei durch $n = [t^k]$ geschiedene Theile zerlegt wird,

$$\zeta'_x(s) - \alpha\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1})\log n}{n^s}$$

$$= -\sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{(H(n) - H(n-1) - \alpha)\log n}{n^s} - \sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1})\log n}{n^s}$$

$$= -\sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{F(n)\log n}{n^s} + \alpha\sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{\log n}{n^s} - \sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} \gamma_n\left(\frac{\log n}{n^s} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)^s}\right) + \gamma_{[t^k]}\frac{\log([t^k]+1)}{([t^k]+1)^s}$$

$$= -\sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{F(n)\log n}{n^s} + \alpha\sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{\log n}{n^s} + \sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} \gamma_n \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s+1}} - \sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} \gamma_n s \int_n^{n+1} \frac{\log u\, du}{u^{s+1}}$$

$$+ \gamma_{[t^k]}\frac{\log([t^k]+1)}{([t^k]+1)^s},$$

$$(35.)\quad \begin{cases} |\zeta'_x(s) - \alpha\zeta'(s)| < \displaystyle\sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{F(n)\log n}{n^{1-\psi(t)}} + \alpha\sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{\log n}{n^{1-\psi(t)}} + g\sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}} \frac{1}{n^{2-\psi(t)}} \\ \qquad + g\displaystyle\sum_{n=[t^k]+1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}}(2+t)\frac{\log(n+1)}{n^{2-\psi(t)}} + O\frac{t^{k(1-\frac{1}{k})}\log t}{t^{k(1-\psi(t))}}. \end{cases}$$

Hierin ist wegen $H(n) = O(n)$ das erste Glied

$$= \sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{F(n)\log n}{n^{1-\psi(t)}} = \sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{H(n) - H(n-1)}{n^{1-\psi(t)}}\log n$$

$$= \sum_{n=1}^{[t^k]} H(n)\left(\frac{\log n}{n^{1-\psi(t)}} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)^{1-\psi(t)}}\right) + \frac{H([t^k])\log([t^k]+1)}{([t^k]+1)^{1-\psi(t)}}$$

$$= O\sum_{n=1}^{[t^k]} n\left(\frac{\log n}{n^{1-\psi(t)}} - \frac{\log(n+1)}{(n+1)^{1-\psi(t)}}\right) + O(t^{k\psi(t)}\log t)$$

$$= O\sum_{n=1}^{[t^k]} \frac{\log n}{n^{1-\psi(t)}}(n - (n-1)) + O(t^{k\psi(t)}\log t)$$

$$= O\int_1^{t^k} \frac{\log u\, du}{u^{1-\psi(t)}} + O(t^{k\psi(t)}\log t) = O\frac{\log(t^k)\, t^{k\psi(t)}}{\psi(t)} + O(t^{k\psi(t)}\log t)$$

$$= O\left(\frac{1}{\psi(t)}\log t \cdot t^{k\psi(t)}\right) + O(t^{k\psi(t)}\log t)$$

$$= O\left(\log t \cdot \log t \cdot e^{k\log t\cdot\frac{1}{k\log(3+t)}}\right) = O(\log^2 t).$$

Ebenso ist das zweite Glied der rechten Seite von (35.)

$$= O\int_1^{t^k} \frac{\log u\, du}{u^{1-\psi(t)}} = O(\log^2 t);$$

das dritte ist

$$= O\int_{t^k}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\frac{1}{k}-\psi(t)}} = O\left(\frac{1}{t^k\left(\frac{1}{k}-\psi(t)\right)}\right) = O\left(\frac{t^{k\psi(t)}}{t}\right) = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

das vierte ist

$$= O\left(t\int_{t^k}^{\infty} \frac{\log u\, du}{u^{1+\frac{1}{k}-\psi(t)}}\right) = O\left(t\,\frac{\log t}{t^k\left(\frac{1}{k}-\psi(t)\right)}\right) = O(t^{k\psi(t)}\log t) = O(\log t),$$

und das fünfte ist

$$= O(t^{-1+k\psi(t)}\log t) = O\left(\frac{\log t}{t}\right).$$

Aus (35.) folgt also für $1-\psi(t) \leqq \Re(s) \leqq 2$

$$(36.)\qquad |\zeta'_x(s) - \alpha\,\zeta'(s)| = O(\log^2 t).$$

Was nun $\zeta'(s)$ anbetrifft, so werde ich gleichfalls beweisen, dass es gleich $O(\log^2 t)$ ist. Aus

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} \qquad (\Re(s) > 0)$$

folgt wegen

$$-s\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s-1}} = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s},$$

dass für jedes m*)

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}\right) - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s-1}}$$

$$= \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^s} - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

ist, also

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2}\,\frac{1}{(m+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1}\,\frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} - \sum_{n=1}^{m+1}\frac{\log n}{n^s} - \sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$+ s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\log(n+u)}{(n+u)^{s+1}}\,du.$$

Für $s = \sigma + ti$ nehme ich nun $m = [t^k]$ an und erhalte für $1-\psi(t) \leqq \sigma \leqq 2$

*) Vergl. S. 90, Z. 12.

$$|\zeta'(s)| < \frac{1}{t^2}\frac{1}{([t^k]+1)^{-\psi(t)}} + \frac{1}{t}\frac{\log([t^k]+1)}{([t^k]+1)^{-\psi(t)}} + \sum_{n=1}^{[t^k]+1}\frac{\log n}{n^{1-\psi(t)}}$$

$$+ \sum_{n=[t^k]+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\psi(t)}} + (2+t)\sum_{n=[t^k]+1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^{2-\psi(t)}}$$

$$= O\left(\frac{t^{k\psi(t)}}{t^2}\right) + O\left(\frac{t^{k\psi(t)}\log t}{t}\right) + O(\log^2 t) + O\left(\frac{1}{t^{k(1-\psi(t))}}\right) + O\left(\frac{t\log t}{t^{k(1-\psi(t))}}\right),$$

$$= O\left(\frac{1}{t^2}\right) + O\left(\frac{\log t}{t}\right) + O(\log^2 t) + O\left(\frac{1}{t^k}\right) + O\left(\frac{t\log t}{t^k}\right),$$

$$(37.)\quad |\zeta'(s)| = O(\log^2 t).$$

(37.) giebt in Verbindung mit (36.)

$$|\zeta_x'(s)| \leqq |\zeta_x'(s) - \alpha\zeta'(s)| + \alpha|\zeta'(s)| = O(\log^2 t) + O(\log^2 t) = O(\log^2 t),$$

der Quotient $\frac{|\zeta_x(\sigma+ti)|}{\log^2 t}$ $(1-\psi(t) \leqq \sigma \leqq 2)$ bleibt also für $t = \infty$ endlich; aus dem Vorigen ergiebt sich also für alle positiven t eine Ungleichung

$$|\zeta_x'(s)| < c_3\left(\frac{1}{t^2} + \log^2 t\right) \qquad (1-\psi(t) \leqq \sigma \leqq 2).$$

Nach der Bemerkung auf S. 91 ist dies a fortiori eine obere Schranke für

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\left(\zeta_x(1+\varepsilon+ti) - \zeta_x(1+ti)\right)\right| \qquad (-\psi(t) \leqq \varepsilon < 0; 0 < \varepsilon \leqq 1):$$

$$(38.)\quad \left|\frac{1}{\varepsilon}\left(\zeta_x(1+\varepsilon+ti) - \zeta_x(1+ti)\right)\right| < c_3\left(\frac{1}{t^2} + \log^2 t\right).$$

Die Ungleichung (26.) ergiebt unter Benutzung von (28.), (34.) und (38.) für $t > 0, 0 < \varepsilon \leqq 1$:

$$|\zeta_x(1+ti)| \geqq |\zeta_x(1+\varepsilon+ti)| - |\zeta_x(1+\varepsilon+ti) - \zeta_x(1+ti)|$$

$$\geqq \frac{1}{(\zeta_x(1+\varepsilon))^{\frac{3}{4}}\,|\zeta_x(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}} - |\zeta_x(1+\varepsilon+ti) - \zeta_x(1+ti)|$$

$$> \frac{1}{\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{4}} c_2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{t} + \log t\right)^{\frac{1}{4}}} - \varepsilon c_3\left(\frac{1}{t^2} + \log^2 t\right);$$

$$(39.)\quad |\zeta_x(1+ti)| > \varepsilon^{\frac{3}{4}}\left(c_1^{-\frac{3}{4}} c_2^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}} (1+t\log t)^{-\frac{1}{4}} - \varepsilon^{\frac{1}{4}} c_3 t^{-2}(1+t^2\log^2 t)\right).$$

Es werde ε gleich der kleineren der beiden Zahlen 1 und

$$\frac{1}{16}\left(\frac{c_1^{-\frac{3}{4}} c_2^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{4}}(1+t\log t)^{-\frac{1}{4}}}{c_3 t^{-2}(1+t^2\log^2 t)}\right)^4 = \frac{1}{16} c_1^{-3} c_2^{-1} c_3^{-4} t^9 (1+t\log t)^{-1}(1+t^2\log^2 t)^{-4}$$

gesetzt; bei passender Wahl der in (34.) vorkommenden, nur nach unten be-

schränkten Constanten c_2 ist der letztere Werth für alle $t > 0$ kleiner als 1, da der in ihm enthaltene Factor $t^9(1+t\log t)^{-1}(1+t^2\log^2 t)^{-4}$ ein gewisses endliches Maximum für $t > 0$ nicht überschreitet. (39.) ergiebt alsdann

$$|\zeta_x(1+ti)| > \varepsilon^{\frac{3}{4}}\left(2\varepsilon^{\frac{1}{4}} c_3 t^{-2}(1+t^2\log^2 t) - \varepsilon^{\frac{1}{4}} c_3 t^{-2}(1+t^2\log^2 t)\right)$$

$$= \varepsilon c_3 t^{-2}(1+t^2\log^2 t) = \frac{1}{16} c_1^{-3} c_2^{-1} c_3^{-3} t^7 (1+t\log t)^{-1}(1+t^2\log^2 t)^{-3}$$

$$= \frac{1}{16} c_1^{-3} c_2^{-1} c_3^{-3} \left(\frac{1}{t} + \log t\right)^{-1} \left(\frac{1}{t^2} + \log^2 t\right)^{-3}.$$

Bei passender Wahl einer gewissen Constanten c_4 ist also für alle $t > 0$

$$(40.) \qquad |\zeta_x(1+ti)| > c_4 \left(\frac{1}{t} + \log t\right)^{-1} \left(\frac{1}{t^2} + \log^2 t\right)^{-3}.$$

Dies lässt sich noch etwas vereinfachen. Um den Pol $s = 1$ lässt sich offenbar eine Umgebung $|s-1| < \varrho$ abgrenzen, so dass für diese s

$$|\zeta_x(s)| > 1$$

ist. Es braucht nur ϱ gleich der kleineren der beiden Zahlen

$$\frac{1}{2k} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{1+\alpha\left(1+2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right)+2g\zeta\left(1+\frac{1}{2k}\right)}$$

gesetzt zu werden, weil alsdann für $|s-1| < \varrho$

$$|\zeta_x(s)| \geqq \alpha|\zeta(s)| - |\zeta_x(s) - \alpha\zeta(s)|$$

$$\geqq \alpha\frac{1}{|s-1|} - \alpha\left|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right| - |\zeta_x(s) - \alpha\zeta(s)|$$

$$> \frac{\alpha}{\varrho} - \alpha\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{\frac{3}{2}}}\right) - g\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}}\left|\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right|$$

$$> \frac{\alpha}{\varrho} - \alpha\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) - g\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}}|s|\int_0^1 \frac{du}{|(n+u)^{s+1}|}$$

$$> \frac{\alpha}{\varrho} - \alpha\left(1+2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right) - 2g\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\frac{1}{k}}\frac{1}{n^{1-\frac{1}{2k}+1}}$$

$$\geqq 1 + \alpha\left(1+2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right) + 2g\zeta\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \alpha\left(1+2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right) - 2g\zeta\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

$$= 1.$$

Für $0 < t < \varrho$ ist also

$$|\zeta_x(1+ti)| > 1; \tag{41.}$$

für $\varrho \leqq t$ ist aber nach (40.)

$$|\zeta_x(1+ti)| > \frac{c_5}{(\log(3+t))^7}$$

bei passender Wahl von c_5. Wenn schliesslich die kleinere der beiden Zahlen 1 und c_5 mit a bezeichnet wird, so ist

für $0 < t < \varrho$ $\qquad |\zeta_x(1+ti)| > 1 \geqq a > \frac{a}{(\log(3+t))^7}$,

für $\varrho \leqq t$ $\qquad |\zeta_x(1+ti)| > \frac{c_5}{(\log(3+t))^7} \geqq \frac{a}{(\log(3+t))^7}$.

Damit ist bewiesen:

Wenn x ein algebraischer Körper ist, so existirt eine durch denselben bestimmte positive Constante a, so dass für alle positiven t

$$|\zeta_x(1+ti)| > \frac{a}{(\log(3+t))^7} \tag{42.}$$

ist.

Für einen vorgelegten algebraischen Körper x liegt also

$$|\zeta_x(1+ti)|\,(\log(3+|t|))^7$$

für alle reellen t oberhalb einer von 0 verschiedenen positiven Constanten a. Der Satz vom Nichtverschwinden der ζ_x-Function auf der Grenzgeraden hat also die schärfere Form angenommen, dass eine wesentlich positive Function von t gefunden worden ist, oberhalb deren der absolute Werth von $\zeta_x(1+ti)$ bleibt; für $t = \infty$ nähert sich diese Function der Grenze 0.

Aus (42.) in Verbindung mit dem auf das Stück $-\psi(t) \leqq \varepsilon < 0$ bezüglichen Theile der Hülfsbetrachtung 3. folgt noch ein weiteres wichtiges Resultat; da erstens für die Stelle $1+ti$ eine wohlbestimmte positive Function, nämlich $\frac{a}{(\log(3+t))^7}$ angegeben worden ist, welche kleiner ist als $|\zeta_x(1+ti)|$, und da zweitens für die Änderung des Werthes der ζ_x-Function beim Hineingehen in die Halbebene $\Re(s) < 1$ von $1+ti$ aus auf der Parallelen zur Axe des Reellen in (38.) die Abschätzung*)

$$|\zeta_x(1-\delta+ti) - \zeta_x(1+ti)| < c_3\,\delta\left(\frac{1}{t^2} + \log^2 t\right) \qquad \left(0 < \delta \leqq \psi(t) = \frac{1}{k\log(3+t)}\right)$$

---

*) (38.) galt für $-\psi(t) \leqq \varepsilon < 0$ und $0 < \varepsilon \leqq 1$; hier ist jene Ungleichung auf das erstere Intervall angewendet und $\varepsilon = -\delta$ gesetzt.

Die ζ_κ-Function hat keine Nullstelle in dem rechts von der Curve

$$\sigma = 1 - \frac{b}{(\log(3+|t|))^9} \qquad (t \gtreqless 0)$$

gelegenen Theil der Ebene.

Das links von $\Re(s) = 1$ gelegene Stück, in dem das Nichtverschwinden der ζ_κ-Function hiermit nachgewiesen ist, ist nicht nur nach oben und unten unendlich ausgedehnt, sondern hat auch unendlich grossen Inhalt.

Für die ***Riemann***sche ζ-Function hat bekanntlich Herr ***de la Vallée-Poussin****) zuerst — unter Hinzuziehung schwieriger functionentheoretischer Betrachtungen — die Aufgabe gelöst, für den reellen Theil σ einer etwaigen Nullstelle $\sigma+ti$ eine unterhalb 1 gelegene obere Schranke zu ermitteln, und ist zu einer Schranke gelangt, deren Abstand von $s = 1+ti$ für $t = \infty$ wie $\frac{1}{\log t}$ zu Null abnimmt. Die vorangegangenen Betrachtungen zeigen, auf die ***Riemann***sche ζ-Function specialisirt, dass man zur Bestimmung einer Schranke (wenn auch nur mit dem asymptotischen Abstande $\frac{1}{(\log t)^9}$ von der Grenzgeraden) auf elementarem Wege gelangen kann, ohne Benutzung der tieferen Untersuchnngen der Herren ***Hadamard, von Mangoldt*** und ***de la Vallée-Poussin*** über die Dichtigkeit der Nullstellen der ζ-Function und die Convergenz gewisser über sie erstreckter Summen; ich habe nicht einmal von der Thatsache Gebrauch gemacht, dass die ζ-Function für $\Re(s) < 0$ existirt.

Die Frage, ob $\zeta_\kappa(s)$ auch über die Gerade $\sigma = 1 - \frac{1}{k}$ hinaus fortsetzbar ist, kann bei dem gegenwärtigen Stande der Idealtheorie noch nicht entschieden werden. Man hat ja für einen beliebig gegebenen algebraischen Zahlkörper die Function $F(n)$, d. h. die Anzahl der Darstellungen der ganzen rationalen Zahl n als Norm eines Ideals, noch nicht genügend untersucht. Für jeden Körper, in welchem dies geschehen ist, kann man der Frage, ob $\zeta_\kappa(s)$ in der ganzen Ebene existirt, näher treten. Ich will beispielsweise zeigen, dass für einige der wichtigsten bisher betrachteten speciellen Körper, die quadratischen Körper und die Kreiskörper der q^α-ten Einheitswurzeln (wo q eine Primzahl bezeichnet), diese Frage im bejahenden

*) „Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée“, Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie royale de Belgique, Bd. 59, 1899.

Sinne zu beantworten ist, und zwar schon zufolge des *Kinkelin**)-*Hurwitz*schen**) Satzes, dass die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$(45.)\qquad \frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+\Delta)^s} + \frac{1}{(a+2\Delta)^s} + \cdots,$$

wo a und Δ positive ganze Zahlen sind***), definirte Function in der ganzen Ebene fortsetzbar ist.

1. Für quadratische Körper der Grundzahl $D = \pm\Delta$ ist bekanntlich

$$F(n) = \sum_\nu \left(\frac{D}{\nu}\right),$$

wo ν alle Theiler von n durchläuft und $\left(\frac{D}{\nu}\right)$ die bekannte von *Dedekind*†) mit (D, ν) bezeichnete Verallgemeinerung des *Legendre-Jacobi*schen Symbols bezeichnet. Dann ist für $\Re(s) > 1$

$$\zeta_x(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_\nu \left(\frac{D}{\nu}\right)}{n^s} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu l)^s}, \text{††)}$$

$$(46.)\qquad \zeta_x(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{\nu^s} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}.$$

Der erste Factor der rechten Seite ist als Summe von endlich vielen Reihen des Typus (45.) in der ganzen Ebene fortsetzbar und definirt bekanntlich eine ganze transcendente Function†††); der zweite Factor liefert die

*) l. c. (vergl. Anm. 4 auf S. 68), S. 8.

**) l. c. (vergl. Anm. 5 auf S. 68) S. 91.

***) Allgemeinere Annahmen brauche ich hier nicht.

†) l. c. S. 637.

††) *Dedekind*, l. c. S. 637; die analoge Transformation einer in der Theorie der quadratischen Formen auftretenden unendlichen Reihe rührt schon von *Dirichlet* her und ist bekanntlich für seine Bestimmung der Klassenzahl der quadratischen Formen von fundamentaler Wichtigkeit.

†††) *Hurwitz*, l. c. S. 88; die Aenderung der Bedeutung des Symbols $\left(\frac{D}{\nu}\right)$ gegenüber der *Hurwitz*schen Arbeit ändert an dem Wortlaut dieses Satzes nichts; nach Herrn *Hurwitz* (l. c., S. 91) hat die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe (45.) definirte Function den Pol $s = 1$ als einzige Singularität im Endlichen, und die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{\nu^s} = \sum_{a=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{a}\right) \left(\frac{1}{a^s} + \frac{1}{(a+\Delta)^s} + \frac{1}{(a+2\Delta)^s} + \cdots\right)$$

von $\varphi(\Delta)$ solchen Reihen könnte daher höchstens einen Pol $s = 1$ haben; aber wegen der Convergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{\nu^s}$ für $\Re(s) > 0$ ist auch jene Stelle regulär.

*Riemann*sche ζ-Function. Die Identität (46.) lehrt also, dass für quadratische Körper $\zeta_x(s)$ in der ganzen Ebene fortsetzbar ist und dass $(s-1)\zeta_x(s)$ eine ganze transcendente Function ist.

2. Für den Kreistheilungskörper der m-ten Einheitswurzeln, wo m eine Primzahlpotenz q^a ist, gestaltet sich der analoge Nachweis folgendermassen*): Es ist

$$\zeta_x(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} \prod_\chi \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{47.}$$

wo χ alle $\varphi(q^a)$ Charaktere durchläuft, die der Gruppe der zu q^a theilerfremden Reste modulo q^a entsprechen, und wo n alle nicht durch q theilbaren ganzen Zahlen durchläuft. Da nun für

$$n \equiv n' \pmod{q^a}$$
$$\chi(n) = \chi(n')$$

ist, so zerfällt die einem bestimmten Charakter entsprechende Reihe $\sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$ in die Summe endlich vieler Reihen vom Typus (45.), ist also in der ganzen Ebene fortsetzbar; das Gleiche gilt also von dem Product $\prod_\chi \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$ endlich vieler solcher Summen; nur die dem Hauptcharakter entsprechende Reihe hat im Endlichen eine Singularität, nämlich den Pol $s=1$, und ihr Quotient durch $1-\frac{1}{q^s}$ ist gleich $\zeta(s)$, so dass nach (47.) auch hier $(s-1)\zeta_x(s)$ eine ganze transcendente Function ist.

Auch für andere Körper höheren Grades, bei denen die Zerfällung der natürlichen Primzahlen in Primideale näher untersucht ist, lässt sich die Theorie der ζ_x-Function weiter verfolgen.

Dritter Abschnitt.

Ueber das Verhalten der Reihen $\sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}$ und $\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$ am Rande der Convergenzhalbebene.

Die über alle Primideale erstreckte Summe $\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$ convergirt für $\Re(s) > 1$, da sie ja Bestandtheil der alsdann absolut convergenten Reihe $\sum \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}$ ist. Für $\Re(s) < 1$ divergirt sie; dies lässt sich indirect so einsehen: Würde

*) Ich schliesse mich der Bezeichnungsweise von *Webers* Algebra, Bd. 2, 2. Aufl., S. 784—786 an.

$$(48.)\qquad \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)}{n^s}.$$

Zur Beantwortung der Frage, ob die für $\Re(s) > 1$ durch (48.) dargestellte Function über die Grenzgerade $\Re(s) = 1$ hinaus fortsetzbar ist, wäre die für $\Re(s) > 1$ gültige Integraldarstellung

$$\frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-xN\mathfrak{p}}\, x^{s-1}\, dx,$$

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{\mathfrak{p}} e^{-xN\mathfrak{p}}\, x^{s-1}\, dx$$

ungeeignet, da man über die analytische Natur der Function $\sum_{\mathfrak{p}} e^{-xN\mathfrak{p}}$ auch in dem Falle des natürlichen Rationalitätsbereiches nicht unterrichtet ist, wo sie, $e^{-x} = y$ gesetzt, im Inneren des Einheitskreises durch die Potenzreihe

$$y^2 + y^3 + y^5 + \cdots = \sum_p y^p$$

dargestellt wird, von der gleichfalls zweifelhaft ist, ob sie über den Convergenzkreis hinaus fortgesetzt werden kann.

Es werde die Reihe (48.) zunächst für den Fall des natürlichen Rationalitätsbereiches ins Auge gefasst, also die Reihe $\sum \frac{1}{p^s}$. Dann ist für $\Re(s) > 1$:

$$(49.)\qquad \begin{cases} \log \zeta(s) = \log \prod_p \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}} = -\sum_p \log\left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right) \\ \qquad\qquad = \sum_p \dfrac{1}{p^s} + \dfrac{1}{2}\sum_p \dfrac{1}{p^{2s}} + \dfrac{1}{3}\sum_p \dfrac{1}{p^{3s}} + \cdots, \end{cases}$$

also

$$(50.)\qquad \sum_p \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) - \left(\frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right).$$

Hierin stellt

$$(51.)\qquad \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ eine absolut convergente *Dirichlet*sche Reihe dar, nämlich $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, wo $a_n = 0$, falls n eine Primzahl oder durch mindestens zwei verschiedene Primzahlen theilbar ist, und $a_n = \frac{1}{\varrho}$ für $n = p^{\varrho}$ ($\varrho \geqq 2$). Die Reihe convergirt gleichmässig für $\Re(s) > \frac{1}{2} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), und (51.) stellt in der Halb-

ebene $\Re(s) > \frac{1}{2}$ eine eindeutige analytische Function dar. Das erste Glied der rechten Seite von (50.) ist in der ganzen Ebene fortsetzbar und hat rechts von $\Re(s) = \frac{1}{2}$ zu Verzweigungsstellen den Pol $s = 1$ von $\zeta(s)$, sowie die eventuell vorhandenen Nullstellen der ζ-Function, deren reelle Theile $> \frac{1}{2}$ sind, über deren Existenz oder Nichtexistenz ja leider immer noch nicht entschieden ist. Die wegen (50.) nunmehr bis $\Re(s) = \frac{1}{2}$ fortgesetzte, für $\Re(s) > 1$ durch $\sum_p \frac{1}{p^s}$ definirte Function heisse $P(s)$. Dann liefert (49.) weiter, zunächst für $\Re(s) > 1$,

$$\log \zeta(s) = P(s) + \frac{1}{2} P(2s) + \frac{1}{3} \sum_p \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{4} \sum_p \frac{1}{p^{4s}} + \cdots,$$

$$(52.) \qquad P(s) = \log \zeta(s) - \frac{1}{2} P(2s) - \left(\frac{1}{3} \sum_p \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{4} \sum_p \frac{1}{p^{4s}} + \cdots\right).$$

Hierin existirt $\log \zeta(s)$ in der ganzen Ebene und verhält sich überall regulär ausser in den isolirt liegenden Nullstellen von $\zeta(s)$ und der Stelle $s = 1$; $P(2s)$ existirt nach dem Vorigen für $\Re(s) > \frac{1}{4}$ und der Klammerausdruck stellt für $\Re(s) > \frac{1}{3}$ eine analytische Function dar; die Function $P(s)$ ist also jetzt durch (52.) bis $\Re(s) = \frac{1}{3}$ fortgesetzt und so weiter. Es sei schon bewiesen, dass $P(s)$ bis $\Re(s) = \frac{1}{m}$ fortsetzbar ist, wo m eine positive ganze Zahl ist. Dann stellen in

$$(53.) \quad \begin{cases} P(s) = \log \zeta(s) - \frac{1}{2} P(2s) - \frac{1}{3} P(3s) - \cdots - \frac{1}{m} P(ms) \\ \qquad\qquad - \left(\frac{1}{m+1} \sum_p \frac{1}{p^{(m+1)s}} + \frac{1}{m+2} \frac{1}{p^{(m+2)s}} + \cdots\right) \end{cases}$$

die $m+1$ Glieder der rechten Seite*) beziehlich für

$$\Re(s) > -\infty, \frac{1}{2m}, \frac{1}{3m}, \cdots \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m+1}$$

---

*) Der Klammerausdruck wird als ein Glied gerechnet; er stellt eine *Dirichlet*sche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ dar.

analytische Functionen mit isolirt liegenden Singularitäten dar; wegen

$$\frac{1}{m^2} < \cdots < \frac{1}{3m} < \frac{1}{2m} \leqq \frac{1}{m+1}$$

leistet (53.) also die Fortsetzung von $P(s)$ bis $\Re(s) = \frac{1}{m+1}$. Die Function ist also bis zur Axe des Imaginären fortsetzbar; jede Verzweigungsstelle von $P(s)$ im Streifen $0 < \sigma < 1$ ist aliquoter Theil einer Nullstelle von $\zeta(s)$ oder des Poles 1 von $\zeta(s)$; diese Stellen können aber umgekehrt $\left(\text{wie z. B. } s = \frac{1}{4}\right)$ auch regulär sein.

Mit Hülfe *Möbius*scher Coefficienten ergiebt sich aus

$$\log \zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{p} \frac{1}{p^{ms}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} P(ms)$$

für $\Re(s) > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(ns) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} P(mns) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{P(ls)}{l} \sum_{n} \mu(n),$$

wo n die Theiler von l durchläuft, d. h. wegen

$$\sum_{n} \mu(n) = 0 \quad (\text{für } l > 1)$$

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(ns),$$

ein Ausdruck, der sich formal ohne Hinweis auf seine Bedeutung für die Fortsetzbarkeit der Function $P(s)$ über $\sigma = 1$ hinaus schon bei Herrn *Scheibner**) findet.

Für die zu einem beliebigen algebraischen Körper $\varkappa$ mit dem Grade $k \geqq 2$ gehörige Function $\mathfrak{P}(s)$, die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\mathfrak{P}(s) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}$$

definirt ist, ergiebt sich ebenso durch die Gleichung

$$(54.) \qquad \mathfrak{P}(s) = \log \zeta_{\varkappa}(s) - \left(\frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \frac{1}{3} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{3s}} + \cdots\right)$$

die Fortsetzbarkeit bis in beliebige Nähe von $\Re(s) = 1 - \frac{1}{k}$ hin; denn für

*) „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer beliebigen Grenze", Zeitschrift für Mathematik, Bd. 5, 1860, S. 236.

rühmtesten Arbeiten bewiesenen Satz*): Wenn für alle ganzzahligen $n \geqq 2$ der Quotient $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ in eine Potenzreihe

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_m}{n^m} + \cdots$$

entwickelt werden kann, wo $a_1, a_2 \ldots a_m \ldots$ beliebige reelle oder complexe Constanten sind und insbesondere a_1 den reellen Theil -1 und einen von 0 verschiedenen imaginären Theil hat, so divergirt die unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots;$$

aber die Summe ihrer ersten n Glieder

$$S(n) = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

überschreitet, dem absoluten Werthe nach, eine gewisse endliche Grenze nicht.

Mit anderen Worten, die Reihe oscillirt in einem endlichen Unbestimmtheitsgebiet.

Für den vorliegenden Fall löst dieser *Weierstrass*sche Satz das gestellte Problem**); denn für

$$u_n = \frac{1}{n^s}$$

ist, $n \geqq 2$ genommen,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n-1)^s}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s = 1 - \frac{s}{n} + \frac{s(s-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots,$$

also für $s = 1 + ti$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{-1-ti}{n} + \frac{(1+ti)\,ti}{2}\,\frac{1}{n^2} + \cdots,$$

so dass genau die Voraussetzungen des *Weierstrass*schen Divergenzkriteriums erfüllt sind.

*Weierstrass****) hat auch gezeigt, dass die Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$ für $\Re(a_1) < -1$ convergirt und für $a_1 = -1$, sowie $\Re(a_1) > -1$ divergirt, ohne endlich zu bleiben; er hat damit wegen $a_1 = -s$ über die Frage nach der Convergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ in allen Fällen Aufschluss gegeben.

---

*) l. c., es handelt sich um den zweiten Theil des von *Weierstrass* mit VII, 2) bezeichneten Satzes.

**) l. c. Satz VII, Anm. 1.

***) l. c. Satz VII, 2).

Da die Reihe (55.) stets divergirt, haben die von Herrn *Vecchi**) unter der Annahme, dass in einem Punkte s_0 der Grenzgeraden $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s_0}}$ convergirt, angestellten Betrachtungen keinen Halt; es giebt gar keinen solchen Punkt.

3. Herr *Kinkelin***) hat genauer die Art der Divergenz der Reihe (55.) untersucht und gefunden, dass,

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^{1+ti}}=S(x)$$

gesetzt, $S(x)+\frac{1}{tix^{ti}}$ sich für $x=\infty$ einer Grenze nähert und zwar dem Werte $\zeta(1+ti)$:

$$\lim_{x=\infty}\left(S(x)+\frac{1}{tix^{ti}}\right)=\zeta(1+ti) \qquad (t \lessgtr 0).$$

Herr *Petersen****) spricht dies in geometrischer Einkleidung so aus: Trägt man die den Zahlen $x=1,2,3,\ldots$ entsprechenden Werthe von $S(x)$ in einer complexen Zahlenebene auf, so nähert sich diese Punktreihe nicht einem bestimmten asymptotischen Punkte (wie es der Fall wäre, wenn $\lim\limits_{x=\infty}S(x)$ existirte), sondern oscillirt derart zwischen endlichen Grenzen, dass sich die Punkte asymptotisch einer Kreislinie nähern, deren Radius $\frac{1}{|t|}$ ist und deren Mittelpunkt der Werth der *Riemann*schen ζ-Function an der Stelle $1+ti$ ist.

4. Wenn für ein specielles $t \gtrless 0$ die Reihe (56.) convergirt, so ist für positive gegen 0 abnehmende ε

$$\lim_{\varepsilon=0}\sum_{p}\frac{1}{p^{1+\varepsilon+ti}}=\sum_{p}\frac{1}{p^{1+ti}},$$

nach einem auf S. 76 citirten Satze.

*) „Sulla funzione $\zeta(s)$ di *Riemann*" Heft 1, Paris (Hermann), 1899, § 4, S. 14—17. Für die späteren Theile der *Vecchi*schen Arbeit ist das angegebene Versehen ohne Belang; Herr *Vecchi* wollte in jenem § 4 nur einen für allgemeine *Dirichlet*sche Reihen gültigen Satz (vergl. S. 76, Anm. 1) an der Reihe (55.) illustriren; hier ist aber dessen Voraussetzung unerfüllbar.

**) l. c., S. 4 und 8; der Leser, welchem Herrn *Kinkelins* Arbeit nicht zugänglich ist, sei auf *Stolz*. „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", Bd. 2, Leipzig, 1886, S. 226—230, verwiesen und darauf aufmerksam gemacht, dass Herr *Kinkelin* ausdrücklich die Uebereinstimmung seiner Function $K(-s)$ mit der *Riemann*schen Function $\zeta(s)$ constatirt.

***) Skandinavisk Naturforskermøde i Kjøbenhavn, 1892, S. 354; Vorlesungen über Functionstheorie, Kopenhagen, 1898, S. 128—129 und 243.

Nun ist aber, wenn man die für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ convergente *Dirichlet*sche Reihe

$$\frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^{3s}} + \cdots,$$

$s = 1 + \varepsilon + ti$ gesetzt, zu $\sum\limits_p \frac{1}{p^{1+\varepsilon+ti}}$ addirt,

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+\varepsilon+ti}} + \left(\frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2(1+\varepsilon+ti)}} + \frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^{3(1+\varepsilon+ti)}} + \cdots\right) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^{1+\varepsilon+ti}}\right)$$

$$= \log \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{1+\varepsilon+ti}}} = \log \zeta(1+\varepsilon+ti).$$

Da für $\varepsilon = 0$ jedenfalls der Klammerausdruck der linken Seite und nach dem Obigen auch das erste Glied der linken Seite sich einer endlichen Grenze nähert, so würde $\lim\limits_{\varepsilon=0} \log \zeta(1+\varepsilon+ti)$ existiren. $1+ti$ könnte also keine Nullstelle der ζ-Function sein, weil sonst bei Annäherung an diese Stelle $\log \zeta(s)$ nicht endlich bleiben könnte.

Aus der Annahme der Convergenz der Reihe (56.) für ein specielles t ergiebt sich also, dass $\zeta(1+ti)$ nicht verschwindet*), ferner dass

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{1+ti}}}$$

convergirt**) und gleich $\zeta(1+ti)$ ist.

5. Merkwürdigerweise gilt hier, wie Herr *Mertens****) bewiesen hat,

*) Dies Nichtverschwinden ist seit einigen Jahren für jedes reelle t bekannt.

**) Dies folgt z. B. aus einem *Pringsheim*schen Satze, der in specialisirter Form lautet: „Wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ convergirt, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ unbedingt convergirt und alle u_n von -1 verschieden sind, so convergirt $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$" („Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte", Mathematische Annalen, Bd. 22, 1883, S. 482); zum Beweise ist im vorliegenden Fall nur zu $\sum\limits_p \frac{1}{p^{1+ti}}$ die convergente Reihe $\sum\limits_p \left(\frac{1}{2}\frac{1}{p^{2(1+ti)}} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^{3(1+ti)}} + \cdots\right)$ gliedweise zu addiren.

***) „Ueber die Convergenz einer aus Primzahlpotenzen gebildeten unendlichen Reihe", Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1887, S. 265—269. Durch mehrere Formeln dieser Arbeit (S. 267, Z. 6 ff.) zieht sich ein Versehen, das aber die Richtigkeit des *Mertens*schen Beweises nicht beeinträchtigt, da das fehlende Glied für $n = \infty$ endlich bleibt.

auch das Umgekehrte: Wenn $\zeta(1+ti)$ für ein $t \gtrless 0$ von Null verschieden ist, so ist die Reihe

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+ti}}$$

convergent. Da nun durch die Herren *Hadamard* und *de la Vallée-Poussin* heutzutage bekannt ist, dass $\zeta(1+ti)$ niemals 0 ist, so folgt in Verbindung mit jenem *Mertens*schen Satz, dass für alle $t \gtrless 0$ die Reihe (56.) convergirt.

Herr *Hadamard**) ist daher allzu vorsichtig, indem er bei dem Schlusse stehen bleibt, dass, ε positiv genommen,

$$\Re \sum_p \frac{1}{p^{1+\varepsilon+ti}} = \sum_p \frac{\cos(t \log p)}{p^{1+\varepsilon}}$$

sich für $\varepsilon = 0$ einer Grenze nähert; er hätte sogar die Convergenz der Reihe $\sum_p \frac{\cos(t \log p)}{p}$ folgern dürfen.

Die *Riemann*sche**), auf die beiden Seiten der Gleichung

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_n \frac{1}{n^s}$$

bezügliche Bemerkung: Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist, ist also, wörtlich genommen, nur für die rechte Seite zutreffend; natürlich ist die Thatsache der Convergenz des Productes auf der Grenzgeraden (excl. $s = 1$) für die bei *Riemann* behandelte Frage nach der Fortsetzbarkeit der ζ-Function ohne Belang.

Ich will nun die analogen Fragen für die $\zeta_\varkappa$-Function in Angriff nehmen, d. h. die Reihen

$$\text{(57.)} \qquad \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1+ti}} \qquad (t \gtrless 0)$$

und

$$\text{(58.)} \qquad \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)}{n^{1+ti}} \qquad (t \gtrless 0)$$

auf ihre Convergenz hin untersuchen.

---

*) l. c. S. 211.

**) l. c. S. 672; Werke, S. 145.

In diesen Reihen sollen die Ideale (bezw. Primideale) nach wachsender Norm geordnet sein; die Reihenfolge der verschiedenen Ideale mit gleicher Norm ist, da ja nur die Normen selbst vorkommen, unerheblich.

Für $t = 0$ divergiren offenbar beide Reihen, wie schon oben*) bemerkt wurde.

Ueber die Reihe (57.) gilt für $t \gtrless 0$ der

Satz: Die Reihe (57.) *divergirt, und zwar oscillirt sie derart zwischen endlichen Grenzen, dass*

$$(59.)\qquad \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n^{1+ti}} + \frac{\alpha}{ti\,x^{ti}}$$

sich einer Grenze nähert; diese Grenze ist $\zeta_x(1+ti)$.

Beweis: Es ist für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$, a fortiori also für $\Re(s) = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F(n)}{n^s} - \frac{\alpha}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^s}.$$

Würde also (57.) convergiren, so würde auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^{1+ti}}$, also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+ti}}$ convergiren. (57.) divergirt daher, und da nach Herrn *Kinkelin***)

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1+ti}} + \frac{1}{ti\,x^{ti}}$$

sich für $x = \infty$ der Grenze $\zeta(1+ti)$ nähert, nähert sich

$$\sum_{n=1}^{x} \left(\frac{F(n)}{n^{1+ti}} - \frac{\alpha}{n^{1+ti}}\right) + \alpha\left(\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1+ti}} + \frac{1}{ti\,x^{ti}}\right) = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n^{1+ti}} + \frac{\alpha}{ti\,x^{ti}}$$

für $x = \infty$ der Grenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n-1}}{n^{1+ti}} + \alpha\,\zeta(1+ti) = \zeta_x(1+ti) - \alpha\,\zeta(1+ti) + \alpha\,\zeta(1+ti) = \zeta_x(1+ti),$$

wie oben behauptet wurde. Die Punktreihe

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n^{1+ti}} = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

nähert sich also asymptotisch einer Kreislinie, deren Mittelpunkt der Werth der ζ_x-Function für $1+ti$ ist und deren Radius die Länge $\frac{\alpha}{|t|}$ hat.

Für das nachfolgende Studium der Reihe (58.) ist es wünschenswerth, über die Geschwindigkeit der Annäherung von

---

*) S. 101.

**) Vergl. S. 107.

$$\sum_{Nn \leq x} \frac{1}{Nn^{1+ti}} + \frac{\alpha}{ti\, x^{ti}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n^{1+ti}} + \frac{\alpha}{ti\, x^{ti}}$$

an den Grenzwerth $\zeta_x(1+ti)$ genaueren Aufschluss zu erhalten. Herr *Piltz**) hat gezeigt, dass

$$(60.)\qquad \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1+ti}} + \frac{1}{ti\, x^{ti}} - \zeta(1+ti) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist; Herr *Mertens***) hat ferner, was im Folgenden gleichfalls Anwendung findet, bewiesen, dass

$$(61.)\qquad \sum_{n=1}^{x} \frac{\log n}{n^{1+ti}} + \frac{\log x}{ti\, x^{ti}} = O(1)$$

ist. Beide Hülfsätze***) (60.) und (61.) lassen sich übrigens aus der bekannten, für $\Re(s) > 0$ gültigen Darstellung der ζ-Function†)

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{x^{s-1}} + (s-1)\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^s} - s(s-1)\sum_{n=x}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

so herleiten: Für $s = 1 + ti$ wird

$$ti\,\zeta(1+ti) = \frac{1}{x^{ti}} + ti \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1+ti}} - ti(1+ti)\sum_{n=x}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{2+ti}},$$

$$\left| -ti\,\zeta(1+ti) + \frac{1}{x^{ti}} + ti \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1+ti}} \right| = |ti(1+ti)| \left| \sum_{n=x}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{2+ti}} \right|$$

$$\leqq t\sqrt{1+t^2} \sum_{n=x}^{\infty} \int_0^1 \frac{1 \cdot du}{n^2} = t\sqrt{1+t^2} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{1}{n^2} = O \sum_{n=x}^{\infty} \frac{1}{n^2} = O \int_x^{\infty} \frac{du}{u^2} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(60.)\qquad \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1+ti}} + \frac{1}{ti\, x^{ti}} - \zeta(1+ti) = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ebenso folgt aus der für $\Re(s) > 0$ gültigen Gleichung††)

$$\zeta(s) = -\frac{1}{(s-1)^2}\frac{1}{x^{s-1}} - \frac{1}{s-1}\frac{\log x}{x^{s-1}} - \sum_{n=1}^{x} \frac{\log n}{n^s} - \sum_{n=x}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$
$$+ s \sum_{n=x}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+u)\,du}{(u+u)^{s+1}}$$

*) l. c. (vergl. Anm. 1 auf S. 73), S. 9—11.

**) l. c., S. 266—267.

***) t ist hier im Gegensatz zu den Betrachtungen auf S. 87 ff. constant, und die Abschätzung bezieht sich auf die unendlich wachsende Variabele x.

†) Vergl. S. 93.

††) Vergl. S. 93.

für $s = 1+ti$

$$\left|\zeta'(1+ti)-\frac{1}{t^2}\frac{1}{x^{ti}}+\frac{1}{ti}\frac{\log x}{x^{ti}}+\sum_{n=1}^{x}\frac{\log n}{n^{1+ti}}\right|$$

$$\leqq \sum_{n=x}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^2}+|1+ti|\sum_{n=x}^{\infty}\int_0^1\frac{u\log(n+u)}{(n+u^2)}du$$

$$<\sum_{n=x}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sqrt{1+t^2}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^2}=O\int_x^{\infty}\frac{du}{u^2}+O\int_x^{\infty}\frac{\log u\,du}{u^2}=O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Da sich somit

$$\zeta'(1+ti)-\frac{1}{t^2}\frac{1}{x^{ti}}+\frac{1}{ti}\frac{\log x}{x^{ti}}+\sum_{n=1}^{x}\frac{\log n}{n^{1+ti}}$$

für $x=\infty$ der Grenze 0 nähert und $\frac{1}{x^{ti}}$ endlich bleibt, ferner $\zeta'(1+ti)$ eine von x unabhängige Constante ist, so ergiebt sich

$$(61.)\qquad \sum_{n=1}^{x}\frac{\log n}{n^{1+ti}}+\frac{\log x}{ti\,x^{ti}}=O(1).$$

(61.) lässt sich auch aus (60.) durch partielle Summation so herleiten:

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{\log n}{n^{1+ti}}=\sum_{n=1}^{x}\log n\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1+ti}}-\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m^{1+ti}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{x}\left((\log n-\log(n+1))\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{1+ti}}+\log(x+1)\sum_{m=1}^{x}\frac{1}{m^{1+ti}}\right.$$

$$=\sum_{n=1}^{x}\left(-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{ti\,n^{ti}}+\zeta(1+ti)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$+\left(\log x+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{ti\,x^{ti}}+\zeta(1+ti)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{ti}\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^{1+ti}}-\zeta(1+ti)\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}+O\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^2}-\frac{\log x}{ti\,x^{ti}}+\log x\cdot\zeta(1+ti)+O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$=O(1)-\zeta(1+ti)(\log x+O(1))+O(1)-\frac{\log x}{ti\,x^{ti}}+\log x\cdot\zeta(1+ti)+O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$=-\frac{\log x}{ti\,x^{ti}}+O(1),$$

$$(61.)\qquad \sum_{n=1}^{x}\frac{\log n}{n^{1+ti}}+\frac{\log x}{ti\,x^{ti}}=O(1).$$

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich zunächst zur Untersuchung der einem beliebigen algebraischen Zahlkörper entstammenden Reihe (57.) über.

benutzen; ausserdem muss aber ein Studium der Vertheilung der Primideale vorangehen, das zu Relationen vom Typus der beiden Sätze (63.) und (64.) führt. Die anzustellenden Hülfsbetrachtungen sind auch an sich von Interesse und werden im folgenden Abschnitt unabhängig von der Theorie der ζ_x-Function weiter verfolgt werden.

Es sind asymptotische Folgerungen aus der Identität zu ziehen, welcher für den natürlichen Rationalitätsbereich die Identität

$$[x]! = \prod_{p \leqq x} p^{\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \cdots}$$

entspricht, wo $[x]$ die grösste ganze Zahl $\leqq x$ ist; diese kann auch

$$\log [x]! = \sum_{p \leqq x} \log p \left(\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \cdots\right)$$

geschrieben werden; jene Verallgemeinerung ist schon von Herrn *Poincaré**) angegeben worden:

Wenn $[x]$ in Analogie zum natürlichen Rationalitätsbereich die Anzahl der Ideale bezeichnet, deren Norm $\leqq x$ ist), und $T(x)$ die Summe der Logarithmen ihrer Normen:**

$$[x] = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} 1,$$

$$T(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \log N\mathfrak{n},$$

so ist

$$(65.) \qquad T(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p} \left(\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right] + \left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right] + \left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^3}\right] + \cdots\right).$$

In der That giebt es, weil

$$N(\mathfrak{p}\mathfrak{m}) = N\mathfrak{p} \cdot N\mathfrak{m}$$

---

*) „Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de *M. Tchebicheff*", Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 8, 1892, S. 49. Die im Texte angewendete Bezeichnungsweise ist von der *Poincaré*schen verschieden. A. a. O. wird z. B. $T(x)$ für ein beliebiges Ideal x definirt und $= \sum_{N\mathfrak{n} < Nx} \log N\mathfrak{n}$ gesetzt. Wenn x eine positive Zahl ist, so ist entsprechend bei Herrn *Poincaré* $T(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x^k} \log N\mathfrak{n}$; dies stimmt allerdings mit der *Tschebyschef*schen Definition für den natürlichen Rationalitätsbereich auch überein, da dort $x^k = x$ ist, empfiehlt sich aber nicht für $k > 1$, weil alsdann constante Factoren auftreten, welche die Analogie aller Zahlkörper in Bezug auf die Dichtigkeit der Primideale verdecken.

**) Die positive Zahl x braucht nicht ganz zu sein.

ist, $\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right]$ Ideale, die durch $\mathfrak{p}$ theilbar sind und eine Norm $\leqq x$ haben, ebenso $\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right]$, die noch mindestens ein zweites Mal durch $\mathfrak{p}$ theilbar, also durch $\mathfrak{p}^2$ theilbar sind und eine Norm $\leqq x$ haben, und so fort, so dass bei der Zerlegung des Productes aller Ideale, deren Norm $\leqq x$ ist, in Primideale das Primideal $\mathfrak{p}$ genau den Exponenten $\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right]+\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right]+\cdots$ erhält, was

$$\prod_{N\mathfrak{n}\leqq x}\mathfrak{n} = \prod_{N\mathfrak{p}\leqq x}\mathfrak{p}^{\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right]+\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right]+\cdots},$$

$$\prod_{N\mathfrak{n}\leqq x} N\mathfrak{n} = \prod_{N\mathfrak{p}\leqq x} N\mathfrak{p}^{\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right]+\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right]+\cdots},$$

also durch Logarithmirung die *Poincaré*sche Identität (65.) ergiebt. Die Summe besteht aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, da für $N\mathfrak{p}^m > x$ $\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^m}\right]=0$ ist.

Ich beweise nunmehr folgende zwei Sätze, die für $k=1$ beziehlich in (63.) und (64.) übergehen:

Es ist

$$(66.)\qquad \sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{k}}} = O\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

und

$$(67.)\qquad \sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log x + O(1).$$

Beweis: Es ist $[x]$ nichts anderes als die früher*) mit $H(x)$ bezeichnete Function

$$\sum_{n=1}^{x} F(n) = \alpha x + \gamma_x\text{**)},$$

wo

$$\gamma_x = O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

Daraus folgt

$$T(x) = \sum_{N\mathfrak{n}\leqq x}\log N\mathfrak{n} = \sum_{n=1}^{x} F(n)\log n = \sum_{n=1}^{x}\log n\,([n]-[n-1])\text{***)}$$

*) S. 80.

**) Wenn x keine ganze Zahl ist, so bedeutet $\sum_{n=1}^{x}$, dass n alle ganzen Zahlen $\leqq x$ zu durchlaufen hat.

***) In diesem Abschnitte und in den zwei nächsten bezeichnet in den auf Ideale bezüglichen Relationen $[x]$ durchweg die oben definirte idealtheoretische Function.

$$= \sum_{n=1}^{x} \log n\,(\alpha n + \gamma_n - \alpha(n-1) - \gamma_{n-1}) = \alpha \sum_{n=1}^{x} \log n + \sum_{n=1}^{x} \log n\,(\gamma_n - \gamma_{n-1})$$

$$= \alpha\,(x \log x - x + O(\log x)) + \sum_{n=1}^{x} \gamma_n\,(\log n - \log(n+1)) + \gamma_x \log(x+1)$$

$$= \alpha(x\log x - x) + O(\log x) + O\sum_{n=1}^{x} n^{1-\frac{1}{k}} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\right)$$

$$= \alpha x \log x - \alpha x + O(\log x) + O\sum_{n=1}^{x} n^{1-\frac{1}{k}} \frac{1}{n} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\right)$$

$$= \alpha x \log x - \alpha x + O(\log x) + O\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\right).$$

Hierin ist $\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}$ für $k > 1$ gleich $O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$, für $k = 1$ gleich $O(\log x)$, also jedenfalls von der Form $O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\right)$; es ergiebt sich also

$$(68.)\qquad T(x) = \alpha x \log x - \alpha x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \log x\right).$$

Berücksichtigt man ausserdem, dass wegen $[x] = O(x)$

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p}\left(\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right] + \left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^3}\right] + \cdots\right) = O\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^2} + \frac{x}{N\mathfrak{p}^3} + \cdots \text{ ad inf.}\right)$$

$$= x\,O\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p}-1)} = x\,O\sum_{N\mathfrak{p}=2}^{\infty} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p}-1)} = x\,O(1) = O(x)$$

ist, so ergiebt sich aus (65.) und (68.):

$$\alpha x \log x - \alpha x + O(x^{1-\frac{1}{k}} \log x)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p}\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right] + \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p}\left(\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right] + \left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^3}\right] + \cdots\right)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p}\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right] + O(x),$$

$$\alpha x \log x + O(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p}\left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right] = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p}\left(\frac{\alpha x}{N\mathfrak{p}} + O\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

$$\alpha x \log x + O(x) = \alpha x \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} + x^{1-\frac{1}{k}}\,O\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{k}}}.$$

Von den beiden Behauptungen (66.) und (67.) ist also die zweite auf die erste zurückgeführt; denn die Combination der letzten Gleichung mit (66.) ergiebt

$$\alpha x \log x + O(x) = \alpha x \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} + O\left(x^{1-\frac{1}{k}} \cdot x^{\frac{1}{k}}\right) = \alpha x \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} + O(x),$$

$$(67.) \qquad \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log x + O(1).$$

Die Gleichung (66.) leite ich im Folgenden zunächst auf einem Wege her, der nicht der einfachste ist, aber zugleich eine Anzahl anderer merkwürdiger Relationen beweist.

Es bezeichne $\mu(\mathfrak{n})$ eine folgendermassen definirte*) idealtheoretische Function: es sei für das Einheitsideal $\mathfrak{o}$

$$\mu(\mathfrak{o}) = 1;$$

wenn $\mathfrak{n}$ durch das Quadrat eines von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Ideales theilbar ist, sei

$$\mu(\mathfrak{n}) = 0;$$

anderenfalls sei, falls $\mathfrak{n}$ aus ϱ verschiedenen Primidealen zusammengesetzt ist,

$$\mu(\mathfrak{n}) = (-1)^{\varrho}.$$

Analog wie bei der von *Möbius***) für $P(1)$ und von Herrn *Mertens****) für $P(i)$ eingeführten Function hat man für die über alle Theiler $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{m}$ erstreckte Summe

$$(69). \qquad \begin{cases} \sum_{\mathfrak{n}} \mu(\mathfrak{n}) = 1 \text{ für } \mathfrak{m} = \mathfrak{o}, \\ \sum_{\mathfrak{n}} \mu(\mathfrak{n}) = 0 \text{ für } \mathfrak{m} \neq \mathfrak{o}. \end{cases}$$

In der That entspricht ja, wenn $\mathfrak{m}$ durch ein Primideal $\mathfrak{p}$ theilbar ist, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\mathfrak{m}_1$, jedem quadratfreien durch $\mathfrak{p}$ theilbaren Theiler $\mathfrak{p}\mathfrak{k}_1$ von $\mathfrak{m}$ ein quadratfreier, nicht durch $\mathfrak{p}$ theilbarer Theiler $\mathfrak{k}_1$ von $\mathfrak{m}_1$, also von $\mathfrak{m}$ und umgekehrt; die durch $\mathfrak{p}$ theilbaren quadratfreien Theiler von $\mathfrak{m}$ lassen sich daher den durch $\mathfrak{p}$ nicht theilbaren quadratfreien Theilern ein-eindeutig zuordnen, und in jedem solchen Paar heben sich wegen

$$\mu(\mathfrak{p}\mathfrak{k}_1) = -\mu(\mathfrak{k}_1)$$

die zwei entsprechenden Zeichen $\mu(\mathfrak{n})$ auf.

---

*) Vergl. *Gegenbauer*, „Ueber complexe Primzahlen“, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien, Abth. 2ᵃ, Bd. 1889, S. 1037. In dieser Arbeit (S. 1036—1091) wird eine grosse Anzahl von Identitäten über beliebige Gattungen complexer Zahlen entwickelt.

**) „Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 9, 1832, S. 111; Werke, Bd. 4, 1887, S. 598.

***) „Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 77, 1874, S. 320.

Aus (69.) ergiebt sich, indem man $\mathfrak{m}$ alle Ideale durchlaufen lässt, deren Norm $\leqq x$ ist, und summirt,

$$1 = \sum_{N\mathfrak{m} \leqq x} \sum_{\mathfrak{n}} \mu(\mathfrak{n}).$$

$\mathfrak{n}$ durchläuft alle Theiler von $\mathfrak{m}$; einem bestimmten $\mathfrak{n}$ entsprechen also diejenigen $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\mathfrak{k}$, für welche

$$N\mathfrak{m} = N\mathfrak{n} \cdot N\mathfrak{k} \leqq x,$$

d. h.

$$N\mathfrak{k} \leqq \frac{x}{N\mathfrak{n}}$$

ist; die Anzahl dieser $\mathfrak{k}$ ist $\left[\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right]$, und es ergiebt sich

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n}) \left[\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right] = 1. \tag{70.}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der auf rationale Zahlen bezüglichen *Meissel**)-*Lipschitz*schen**) Identität:

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = 1. \tag{71.}$$

Unter der Benutzung einer von Herrn *Gram****) auf (71.) angewendeten Schlussweise erhalte ich aus (70.)

$$1 = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n}) \left(\alpha \frac{x}{N\mathfrak{n}} + O\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right),$$

$$1 = \alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} + x^{1-\frac{1}{k}} O \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}}. \tag{72.}$$

Nun ist

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{[n]-[n-1]}{n^{1-\frac{1}{k}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} [n] \left(\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\frac{1}{k}}}\right) + \frac{[x]}{(x+1)^{1-\frac{1}{k}}},$$

---

*) „Observationes quaedam in theoria numerorum“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 48, 1854, S. 303.

**) „Sur des séries relatives à la théorie des nombres“, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 89, 1879, S. 949.

***) „Undersögelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graense,“ Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling, Ser. 6, Bd. 2, 1884, S. 197—198 und 291.

also wegen

$$[x] = O(x),\ 0 < \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\frac{1}{k}}} < \frac{1-\frac{1}{k}}{n^{2-\frac{1}{k}}} < \frac{1}{n^{2-\frac{1}{k}}}:$$

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}} = O \sum_{n=1}^{x} n \cdot \frac{1}{n^{2-\frac{1}{k}}} + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right) = O \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}} + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

$$(73.) \qquad = O\left(x^{\frac{1}{k}}\right);$$

(73.) ergiebt, in (72.) eingesetzt,

$$1 = \alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} + O(x),$$

$$(74.) \qquad \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} = O(1).$$

Die unendliche Reihe

$$\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}},$$

die formal aus der für $\Re(s) > 1$ convergirenden Reihe

$$(75.) \qquad \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s}$$

für $s = 1$ entsteht, *convergirt* also *entweder, oder sie oscillirt zwischen endlichen Unbestimmtheitsgrenzen.*

Die Reihe (75.) stimmt wegen

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)$$

für $\Re(s) > 1$ mit der Function $\frac{1}{\zeta_x(s)}$ überein. Falls also (75.) für $s = 1$ thatsächlich convergirt, so ist die Summe

$$\sum_{\mathfrak{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\mathfrak{n}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}^{1+\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\zeta_x(1+\varepsilon)} = 0.$$

Setzt man

$$\vartheta(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p}$$

und

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \cdots *)$$

*) Die Summe ist eine endliche, da für $y < 2$ $\vartheta(y) = 0$ ist.

$$= \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{p} \leqq \sqrt{x}} \log N\mathfrak{p} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{N\mathfrak{p} \leqq \sqrt[m]{x}} \log N\mathfrak{p},$$

so ist, wie schon Herr *Poincaré**) als Verallgemeinerung der entsprechenden *Tschebyschef*schen Identität angegeben hat,

$$(76.) \qquad T(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right).$$

Denn

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{N\mathfrak{p} \leqq \sqrt[m]{\frac{x}{N\mathfrak{n}}}} \log N\mathfrak{p} = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} c_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p},$$

wo $c_{\mathfrak{p}}$ die Anzahl der Paare m, $\mathfrak{n}$ ist, für welche

$$N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{N\mathfrak{p}^m}$$

ist, d. h.

$$c_{\mathfrak{p}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^m}\right] = \left[\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right] + \left[\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right] + \cdots,$$

was gerade den Ausdruck (65.) von $T(x)$ ergiebt.

Mit Hülfe der verallgemeinerten *Möbius*schen Coefficienten erhält man aus (76.)

$$T\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}}\right) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{N\mathfrak{m}}} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}\,N\mathfrak{n}}\right),$$

$$\sum_{N\mathfrak{m} \leqq x} \mu(\mathfrak{m})\, T\left(\frac{x}{N\mathfrak{m}}\right) = \sum_{\substack{\mathfrak{m},\, \mathfrak{n} \\ N(\mathfrak{m}\mathfrak{n}) \leqq x}} \mu(\mathfrak{m})\, \psi\left(\frac{x}{N(\mathfrak{m}\mathfrak{n})}\right) = \sum_{N\mathfrak{k} \leqq x} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{k}}\right) \sum_{\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{m}),$$

wo $\mathfrak{m}$ die Theiler von $\mathfrak{k}$ durchläuft; nach (69.) ist also

$$(77.) \qquad \psi(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n})\, T\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right).$$

Hierin setze ich den in (68.) gefundenen asymptotischen Werth von $T(x)$ mit der für den vorliegenden Zweck ausreichenden Abschätzung $\alpha x \log x - \alpha x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right)$ ein:

$$\psi(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \mu(\mathfrak{n}) \left(\alpha \frac{x}{N\mathfrak{n}} \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} - \alpha \frac{x}{N\mathfrak{n}} + O\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

$$(78.) \quad \psi(x) = \alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} - \alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} + x^{1-\frac{1}{2k}} O \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{2k}}}.$$

---

*) l. c., S. 51.

Nach (74.) ist das zweite Glied der rechten Seite $O(x)$. Der Nachweis, dass auch das erste $O(x)$ ist, gelingt mit Hülfe eines von Herrn *v. Mangoldt**) für den natürlichen Rationalitätsbereich angewandten Kunstgriffs in Verbindung mit einigen oben entwickelten Sätzen. Es ist, wenn $\mathfrak{n}$ alle Theiler von $\mathfrak{m}$ durchläuft,

$$1 = \sum_{N\mathfrak{m} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{m}} \sum_{\mathfrak{n}} \mu(\mathfrak{n}) = \sum_{\substack{\mathfrak{k}, \mathfrak{n} \\ N(\mathfrak{k}\mathfrak{n}) \leqq x}} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{k}\mathfrak{n})} = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \sum_{N\mathfrak{k} \leqq \frac{x}{N\mathfrak{n}}} \frac{1}{N\mathfrak{k}}.$$

Im vorigen Abschnitt habe ich bewiesen, dass

$$(20.) \qquad \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = \alpha \log x + \beta + O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{k}}}\right)$$

ist; wesentlich ist die Existenz der Constanten α, β, nicht ihr Werth, der aus der Rechnung nachträglich wieder herausfallen wird. Es ist also

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \left(\alpha \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} + \beta + O\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)^{-\frac{1}{k}}\right) \\ &= \alpha \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} + \beta \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{k}}} O \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}}. \end{aligned}$$

Rechts ist das zweite Glied nach (74.), das dritte nach (73.) gleich $O(1)$, die linke Seite ist sogar constant; also ergiebt sich

$$(79.) \qquad \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n}} \log \frac{x}{N\mathfrak{n}} = O(1).$$

Was das letzte Glied in (78.) betrifft, so ist

$$\begin{aligned} \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{2k}}} &= \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{2k}}} \\ &= \sum_{n=1}^{x} \frac{[n]-[n-1]}{n^{1-\frac{1}{2k}}} \\ &= \sum_{n=1}^{x} [n] \left(\frac{1}{n^{1-\frac{1}{2k}}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\frac{1}{2k}}}\right) + \frac{[x]}{(x+1)^{1-\frac{1}{2k}}} \end{aligned}$$

---

*) „Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$“, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1897, S. 838.

$$= O \sum_{n=1}^{x} n \cdot \frac{1}{n^{2-\frac{1}{2k}}} + O\left(x^{\frac{1}{2k}}\right)$$

$$= O \int_1^x \frac{du}{u^{1-\frac{1}{2k}}} + O\left(x^{\frac{1}{2k}}\right)$$

$$(80.) \qquad = O\left(x^{\frac{1}{2k}}\right).$$

(79.), (74.) und (80.) ergeben, in (78.) eingesetzt,

$$\psi(x) = \alpha x O(1) + \alpha x O(1) + x^{1-\frac{1}{2k}} O\left(x^{\frac{1}{2k}}\right),$$

$$(81.) \qquad \psi(x) = O(x)$$

und damit wegen $\vartheta(x) \leqq \psi(x)$

$$(82.) \qquad \vartheta(x) = O(x).$$

Die Gleichungen (81.) und (82.) lassen sich übrigens kürzer unter Benutzung des entsprechenden *Tschebyschef*schen auf den natürlichen Rationalitätsbereich P bezüglichen Resultates

$$\vartheta_P(x) = \sum_{p \leqq x} \log p = O(x)$$

herleiten. Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ gehört eine rationale Primzahl p, für welche

$$N\mathfrak{p} = p^f \quad (f \leqq k)$$

ist, und zu jeder Primzahl p gehören höchstens k Primideale $\mathfrak{p}$, deren Normen Potenzen von p sind. Also ist jedenfalls a fortiori

$$\vartheta(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p} \leqq k \sum_{p \leqq x} \log(p^k)$$

$$= k \sum_{p \leqq x} k \log p = k^2 \sum_{p \leqq x} \log p = k^2 \vartheta_P(x)^{*})$$

$$(82.) \qquad = O(x),$$

und weil in

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(\sqrt{x}) + \vartheta(\sqrt[3]{x}) + \cdots,$$

*) Übrigens folgt aus $\mathfrak{o}p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ genauer, dass

$$\log N\mathfrak{p}_1 + \cdots + \log N\mathfrak{p}_\nu = \log N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_\nu) \leqq \log N(\mathfrak{o}p) = k \log p$$

ist, also $\vartheta(x) \leqq k\, \vartheta_P(x)$.

die Anzahl der Glieder $\vartheta\,(\sqrt[m]{x})$, wo $\sqrt[m]{x} \geqq 2$ ist, die Grössenordnung $\log x$ hat,

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\log x)\,\vartheta(\sqrt{x})^{*)} = O(x) + O(\sqrt{x}\log x)$$

$$(81.) \qquad = O(x).$$

Aus

$$\vartheta(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p} = \sum_{n=1}^{x} G(n)\log n = O(x),$$

wo $G(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Norm eines Primideales ist, folgt

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{G(n)\log n}{n^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{n^{1-\frac{1}{k}}}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \vartheta(n)\left(\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\frac{1}{k}}}\right) + O\,\frac{\vartheta(x)}{x^{1-\frac{1}{k}}} = O\sum_{n=1}^{x} n \cdot \frac{1}{n^{2-\frac{1}{k}}} + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

$$= O\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}} + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right) = O\left(x^{\frac{1}{k}}\right)^{**)},$$

so dass der Nachweis der Relationen (66.) und (67.) vollendet ist.

Jetzt bin ich in der Lage, den Beweis des schon auf S. 113 angekündigten Satzes zu führen:

Die unendliche Reihe

$$(58.) \qquad \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}$$

convergirt für jedes $t \lessgtr 0$.

Beim Beweise schliesse ich mich möglichst an das *Mertens*sche Vorbild des natürlichen Rationalitätsbereiches an.

Es werde

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} = \mathfrak{S}(x)$$

---

*) Uebrigens ist genauer

$$\psi(x) - \vartheta(x) = \vartheta(\sqrt{x}) + O(\log x)\,\vartheta(\sqrt[3]{x}) = O(\sqrt{x}) + O(\sqrt[3]{x}\log x) = O(\sqrt{x}).$$

**) Dies ergiebt sich auch aus $\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{k}}} \leqq k \sum_{p \leqq x} \frac{\log(p^k)}{p^{1-\frac{1}{k}}} = O\sum_{p \leqq x} \frac{\log p}{p^{1-\frac{1}{k}}}$.

gesetzt; dann ist nach dem Satze auf S. 110

$$(83.)\qquad \mathfrak{S}(x) = O(1)$$

und nach (62.) genauer

$$(84.)\qquad \mathfrak{S}(x) = \zeta_x(1+ti) - \frac{\alpha}{tix^{ti}} + O\left(x^{-\frac{1}{k}}\right).$$

Wenn ferner

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{F(n)\log n}{n^{1+ti}} = \mathfrak{T}(x)$$

gesetzt wird, so ist

$$\mathfrak{T}(x) - \alpha \sum_{n=1}^{x} \frac{\log n}{n^{1+ti}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{\log n}{n^{1+ti}} (\alpha n + \gamma_n - \alpha(n-1) - \gamma_{n-1} - \alpha)$$

$$= \sum_{n=1}^{x} \frac{\log n}{n^{1+ti}} (\gamma_n - \gamma_{n-1}).$$

Die rechte Seite bleibt für $x = \infty$ endlich (und nähert sich sogar einer Grenze), da die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} (\gamma_n - \gamma_{n-1})$$

für $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$, a fortiori also für $\Re(s) = 1$ convergirt:

$$\mathfrak{T}(x) = \alpha \sum_{n=1}^{x} \frac{\log n}{n^{1+ti}} + O(1),$$

also unter Benutzung der *Mertens*schen Gleichung (61.)

$$(85.)\qquad \mathfrak{T}(x) = -\frac{\alpha \log x}{tix^{ti}} + O(1).^{*)}$$

Nun ist aber, wie man leicht sieht,

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{n}}{N\mathfrak{n}^{1+ti}}$$

$$(86.) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \frac{x}{N\mathfrak{p}}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{1+ti}} + \sum_{N\mathfrak{p} \leqq \sqrt{x}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{2(1+ti)}} \sum_{N\mathfrak{m} \leqq \frac{x}{N\mathfrak{p}^2}} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{1+ti}} + \cdots;$$

denn aus

$$\mathfrak{n} = \Pi \mathfrak{p}^a$$

folgt

$$N\mathfrak{n} = \Pi N\mathfrak{p}^a,$$

---

*) (85.) lässt sich auch aus (84.) ebenso herleiten wie auf S. 112 (61.) aus (60.).

$$\log N\mathfrak{n} = \sum_{\mathfrak{p}} a \log N\mathfrak{p} = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\\(a \geqq 1)}} \log N\mathfrak{p} + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\\(a \geqq 2)}} \log N\mathfrak{p} + \cdots ;$$

wenn man also die Summe $\mathfrak{T}(x)$ nach den $\log N\mathfrak{p}$ ordnet, so entsprechen jedem $\mathfrak{p}$ alle Multipla $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{p}$, dann alle Multipla $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{p}^2$ noch ein zweites Mal, u. s. f. (86.) lässt sich folgendermassen schreiben:

$$(87.)\quad \mathfrak{T}(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} \mathfrak{S}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)$$
$$+ \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(1+ti)}} \mathfrak{S}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^2}\right) + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{3(1+ti)}} \mathfrak{S}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}^3}\right) + \cdots\right).$$

Die zweite Summe ist wegen (83.)

$$= O \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^2} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^3} + \cdots \text{ ad inf.}\right) = O \sum_{N\mathfrak{p}=2}^{\infty} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}\,(N\mathfrak{p}-1)} = O(1).$$

Also ist, wenn man die rechten Seiten der Gleichungen (85.) und (87.) gleichsetzt,

$$-\frac{a \log x}{tix^{ti}} + O(1) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} \mathfrak{S}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right),$$

also wegen (84.)*)

$$= \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} \left(\zeta_x(1+ti) - \frac{a}{ti\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)^{ti}} + O\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}}\right)^{-\frac{1}{k}}\right)$$

$$= \zeta_x(1+ti) \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} - \frac{a}{tix^{ti}} \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{k}}}\, O \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{\left|N\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{k}+ti}\right|}.$$

Hierin ist

$$\frac{1}{x^{ti}} = O(1),$$

und, wie oben bewiesen wurde,

$$(67.)\qquad \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log x + O(1),$$

sowie

$$(66.)\qquad \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{k}}} = O\left(x^{\frac{1}{k}}\right),$$

*) (84.) gilt auch für gebrochene x, da bei Vermehrung von x um einen echten Bruch die Aenderung von $\frac{1}{x^{ti}}$ nur die Grössenordnung $O\left(\frac{1}{x}\right)$ hat.

also auch

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{\left|N\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{k}+ti}\right|} = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1-\frac{1}{k}}} = O\left(x^{\frac{1}{k}}\right);$$

daraus folgt

$$-\frac{\alpha \log x}{ti\, x^{ti}} + O(1) = \zeta_x(1+ti) \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} - \frac{\alpha \log x}{ti\, x^{ti}} + O(1),$$

$$\zeta_x(1+ti) \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} = O(1). \tag{88.}$$

Nunmehr mache ich von dem Satze

$$\zeta_x(1+ti) \neq 0$$

Gebrauch, ohne welchen die so mühsam hergeleitete Relation (88.) für unendlich viele Werthe von t eine Trivialität sein könnte. Durch Division mit der Zahl $\zeta_x(1+ti)$ ergiebt sich, dass

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{G(n) \log n}{n^{1+ti}} = O(1)$$

ist, d. h. dem absoluten Betrage nach für alle x kleiner bleibt als eine endliche Zahl. Bekanntlich*) kann man durch partielle Summation beweisen: Wenn $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ reelle oder complexe Constanten sind und

$$\sum_{n=1}^{v} u_n = O(1)$$

ist, wenn ferner $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ eine Reihe positiver, monoton zu 0 abnehmender Zahlen ist, so convergirt die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n.$$

Jene Voraussetzungen sind für

$$u_n = \frac{G(n) \log n}{n^{1+ti}}, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\log n} \qquad (n \geqq 2)$$

erfüllt; also convergirt die unendliche Reihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} = \sum_{n=1}^{x} \frac{G(n)}{n^{1+ti}}. \qquad (t \lessgtr 0). \tag{58.}$$

---

*) Diesen Satz sprach wohl zuerst *Catalan*, „Traité élémentaire des séries", Paris, 1860, S. 32 aus; vergl. auch *Dedekind*, l. c., S. 376—377. Aus ihm folgt z. B. unter Anwendung des Satzes (74.) die Convergenz der Reihe $\sum_{N\mathfrak{n}=2}^{x} \frac{\mu(\mathfrak{n})}{N\mathfrak{n} \log N\mathfrak{n}}$.

Nach einem früher citirten Satze*) convergirt also auch das unendliche Product

$$\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}}} = e^{\sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(1+ti)}} + \cdots},$$

und zwar ist wegen

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+ti}} = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}}$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left(\log \zeta_x(1+\varepsilon+ti) - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(1+\varepsilon+ti)}} - \frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{3(1+\varepsilon+ti)}} - \cdots\right)$$

$$= \log \zeta_x(1+ti) - \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(1+ti)}} - \frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{3(1+ti)}} - \cdots$$

der Werth des unendlichen Productes gleich $\zeta_x(1+ti)$:

Das unendliche, nach wachsenden $N\mathfrak{p}$ geordnete Product

$$\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}$$

convergirt nicht nur, wie bekannt, für $\Re(s) > 1$, sondern auch für $\Re(s) = 1$ (excl. $s = 1$), und es stellt auch auf dieser Geraden die ζ_x-Function dar.

Ich komme jetzt wieder zu allgemeineren Untersuchungen über *Dirichlet*sche Reihen, die ich aber nur so weit verfolge, als für die in dieser Arbeit zu machenden Anwendungen erforderlich ist; ich spreche also hier nur von Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Wenn eine Potenzreihe an einer Stelle des Convergenzkreises divergirt, aber die durch sie im Innern dargestellte Function in der Umgebung jener Stelle fortsetzbar ist, so kann man unter Umständen aus den Gliedern der divergenten Reihe den Werth der Function an der betreffenden Stelle berechnen. Der erste Satz dieser Kategorie, der sich übrigens nur auf reelle Variabele bezieht, rührt von Herrn *Frobenius***) her und lautet: Sind $a_0, a_1, a_2 \ldots$ reelle Grössen, ist $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ und nähert sich

*) S. 108, Anm. 2.

**) „Ueber die *Leibnitz*sche Reihe", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 89, 1880, S. 262—264.

$$\frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n}$$

bei wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze M, so ist die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für die Werthe von x zwischen -1 und $+1$ convergent, und die durch sie dargestellte Function nähert sich, wenn x beständig zunehmend gegen 1 convergirt, dem Werthe M als Grenze.

Herr *Hölder**) hat diesem Satz eine Reihe analog beweisbarer Sätze über Potenzreihen folgen lassen, auch einige über *Dirichlet*sche Reihen; letztere**) beziehen sich aber nur auf Fälle, in denen aus der Natur der Coefficienten auf die Existenz eines

$$\lim_{s=0} s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

geschlossen wird und nicht unmittelbar auf die im Folgenden zu behandelnde Frage, ob man unter gewissen Umständen aus den Gliedern der divergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ den etwa vorhandenen

$$\lim_{s=0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

berechnen kann.

Es werde

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

gesetzt; wenn dann erstens für jedes positive s

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_x}{x^s} = 0 \tag{89.}$$

ist und wenn zweitens

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_x}{x}$$

sich für $x = \infty$ der Grenze M nähert, so convergirt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für $s > 0$,

---

*) „Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze", Mathematische Annalen, Bd. 20, 1882, S. 535—549. Die *Frobenius*sche Arbeit wird von Herrn *Borel*, dem Begründer der modernen Theorie der summirbaren divergenten Reihen, in seinem Buche „Leçons sur les séries divergentes", Paris 1901, S. 5 und 87 ausdrücklich als erstes Beispiel einer exacten Behandlung divergenter Reihen erwähnt.

**) Vergl. auch die auf S. 72, Anm. 2, citirte *Pringsheim*sche Arbeit.

Function für $s=0$ aus der divergenten, daselbst nur formal vorhandenen Reihenentwickelung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hergeleitet werden kann.

Beispiele: 1) Für die *Riemann*sche ζ-Function ist bekanntlich

$$\left(1-\frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\frac{2}{2^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^s} \quad (\Re(s)>1)$$

$$(90.)\qquad =-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots;$$

die Summe (90.) convergirt für $s>0$ (also für $\Re(s)>0$) und stellt dort die mit dem Factor $1-2^{1-s}$ multiplicirte ζ-Function dar. Für $s=0$ geht die Reihe (90.) in die divergente Reihe

$$1-1+1-1+\cdots$$

mit der „Summe" $\frac{1}{2}$ über; folglich darf man auf Grund des vorhin bewiesenen Satzes mit voller Strenge schliessen:

$$-\zeta(0)=\frac{1}{2},$$

$$(91.)\qquad \zeta(0)=-\frac{1}{2}.$$

Diese Gleichung (91.) ist nicht neu und steht z. B. schon in Herrn *Kinkelins**) Abhandlung. Der Werth von $\zeta(0)$ tritt beispielsweise in der *Riemann*schen Functionalgleichung

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}=\frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)$$

in Evidenz, wenn man s an 0 heranrücken lässt und beachtet, dass die linke Seite wie $-\frac{1}{\zeta(0)}\frac{1}{s}$, die rechte wie $\frac{2}{s}$ unendlich wird.

2) Noch viel merkwürdigere Resultate liefert die Anwendung des obigen Satzes auf die von Herrn *Kinkelin***) und später unabhängig von Herrn *Hurwitz****) betrachteten Functionen

$$(92.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

welche bei der Bestimmung der Klassenzahl der binären quadratischen Formen der Discriminante D auftreten. Ich verändere im Folgenden die ältere,

*) l. c., S. 13.

**) l. c., S. 19 ff.

***) l. c. (vergl. Anm. 5 auf S. 68).

oder $\equiv 12$ (mod. 16); dann lautet das *Kinkelin-Hurwitz*sche Resultat in dieser Bezeichnungsweise, dass die für $\Re(s) > 0$ durch die Reihe (92.) dargestellte Function $\Phi(s)$ eine ganze transcendente Function ist, welche der Functionalgleichung genügt:

$$(95.) \qquad \Phi(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^s \sqrt{\Delta} \cos\frac{s\pi}{2}\Phi(1-s) \qquad (D=-\Delta<0),$$

$$(96.) \qquad \Phi(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\pi}\left(\frac{2\pi}{D}\right)^s \sqrt{D} \sin\frac{s\pi}{2}\Phi(1-s) \qquad (D>0).$$

Da nun die Reihe (92.) noch für $0<\Re(s)<1$ convergirt und die Function $\Phi(s)$ darstellt, und da $1-s$ mit s gleichzeitig in jenem Streifen liegt, lassen sich die Gleichungen (95.) und (96.), wenn $\Phi(s)$ durch (92.) und $\Phi(1-s)$ durch die entsprechende Reihe ersetzt wird, für $0<\Re(s)<1$ so schreiben:

$$(97.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s} = \frac{\Gamma(1-s)}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\Delta}\right)^s \sqrt{\Delta}\cos\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1-s}} \qquad (D<0),$$

$$(98.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s} = \frac{\Gamma(1-s)}{\pi}\left(\frac{2\pi}{D}\right)^s \sqrt{D}\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1-s}} \qquad (D>0).$$

Ich betrachte diese Gleichungen speciell für kleine positive s und lasse s gegen 0 abnehmen.

Für $s=0$ erhält, falls $D<0$, die rechte Seite von (97.) den Werth $\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$; dagegen erhält, falls $D>0$, die rechte Seite von (98.) für $s=0$ den Werth 0, während die linken Seiten von (97.) und (98.) in die divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)$ übergehen. Auf diese divergente Reihe ist nun, wie gezeigt werden soll, der Satz auf S. 128 anwendbar. In der That ist für

$$a_n = \left(\frac{D}{n}\right)$$

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{D}{m}\right) = O(1)$$

und, da die S_n die Periode Δ haben ($S_n = S_{n+\lambda\Delta}$),

$$\sum_{n=1}^{x} S_n = \left[\frac{x}{\Delta}\right]\sum_{n=1}^{\Delta} S_n + \sum_{\left[\frac{x}{\Delta}\right]\Delta}^{x} S_n{}^{*}).$$

*) Dass das Glied $S_{\left[\frac{x}{\Delta}\right]\Delta}$ zweimal hingesetzt ist, ist unerheblich, da es $=0$ ist.

Für $D > 0$ liegt der Zusammenhang verborgener; es wurde vorhin bemerkt, dass beide Seiten von (98.) für $s = 0$ den Grenzwerth 0 haben. Wenn man jedoch zuvor beide Seiten von (98.) durch s dividirt und dann zur Grenze übergeht, oder, was dasselbe ist, an Stelle dessen erst nach s differentiirt*) und dann s gegen 0 convergiren lässt, so ergiebt sich rechts

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{D}\,\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\sqrt{D}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n};$$

links erhält man für $s > 0$ durch Differentiiren die Reihe

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n^s};$$

dieselbe geht für $s = 0$ in die divergente Reihe $-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\log n$ über.

Es soll gezeigt werden, dass auf diese Reihe der Satz auf S. 128 anwendbar ist; für

$$a_n = \left(\frac{D}{n}\right)\log n$$

ist

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{D}{m}\right)\log m = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{D}\right]D}\left(\frac{D}{m}\right)\log m + \sum_{\left[\frac{n}{D}\right]D}^{n}\left(\frac{D}{m}\right)\log m^{**}),$$

$$(100.)\qquad \sum_{n=1}^{x} S_n = \sum_{n=1}^{x}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{D}\right]D}\left(\frac{D}{m}\right)\log m + \sum_{n=1}^{x}\sum_{\left[\frac{n}{D}\right]D}^{n}\left(\frac{D}{m}\right)\log m.$$

Aus dieser Gleichung ist die Existenz von

$$\lim_{x=\infty}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x} S_n$$

nachzuweisen und der Werth des limes zu berechnen. Die zweite Doppelsumme in (100.) ist, da das Glied $\left(\frac{D}{m}\right)\log m$ für $\left[\frac{n}{D}\right]D \leqq m \leqq n$ auftritt,

---

*) Gliedweise Differentiation ist ja im Convergenzbereiche einer *Dirichlet*schen Reihe erlaubt.

**) vergl. S. 132, Anm. 1.

d. h. für alle n von m (incl.) bis $\left[\frac{m}{D}\right] D+D-1$ (incl.), also $\left[\frac{m}{D}\right] D-m+D$ Male auftritt, gleich

$$\sum_{m=1}^{x}\left(\frac{D}{m}\right)\left(\left[\frac{m}{D}\right] D-m+D\right)\log m = \sum_{m=1}^{x} c_m \log m.$$

Nun hat die Function $c_m = \left(\frac{D}{m}\right)\left(\left[\frac{m}{D}\right] D-m+D\right)$ die Periode D, da

$$c_{m+D} = \left(\frac{D}{m+D}\right)\left(\left[\frac{m+D}{D}\right] D-(m+D)+D\right) = \left(\frac{D}{m}\right)\left(\left(\left[\frac{m}{D}\right]+1\right) D-m-D+D\right)$$

$$= \left(\frac{D}{m}\right)\left(\left[\frac{m}{D}\right]D-m+D\right) = c_m$$

ist, und c_m ist daher höchstens $\varphi(\Delta)$ verschiedener zwischen $-(D-1)$ und $D-1$ gelegener Werthe fähig; wegen (94.) und (99.) ist nun

$$\sum_{m=1}^{D} c_m = \sum_{m=1}^{D}\left(\frac{D}{m}\right)(-m+D) = -\sum_{m=1}^{D}\left(\frac{D}{m}\right)m + D\sum_{m=1}^{D}\left(\frac{D}{m}\right) = 0,$$

$$C_x = \sum_{m=1}^{x} c_m = \left[\frac{x}{\Delta}\right]\sum_{m=1}^{\Delta} c_m + \sum_{\left[\frac{x}{\Delta}\right]\Delta}^{x} c_m = \sum_{\left[\frac{x}{\Delta}\right]\Delta}^{x} c_m = O(1),$$

was durch partielle Summation

$$\sum_{m=1}^{x} c_m \log m = \sum_{m=1}^{x} (C_m - C_{m-1}) \log m = \sum_{m=1}^{x-1} C_m (\log m - \log (m+1)) + C_x \log x$$

$$= O\sum_{m=1}^{x-1} (\log(m+1) - \log m) + O(\log x) = O(\log x)$$

ergiebt, so dass die zweite Doppelsumme in (100.) $= O(\log x)$ ist.

Was die erste Doppelsumme in (100.) betrifft, so ist nach *Euler* für ganzzahlig ins Unendliche wachsendes y

$$\Gamma(a) = \lim_{y=\infty} \frac{y!\, y^a}{a(a+1)\cdots(a+y)},$$

$$\log \Gamma(a) = \lim_{y=\infty} \left(\log(y!) + a\log y - \sum_{\nu=0}^{y} \log(a+\nu)\right),$$

also nach der *Stirling*schen Formel

$$\log \Gamma(a) = \lim_{y=\infty}\left(y\log y - y + \frac{1}{2}\log y + \log\sqrt{2\pi} + a\log y - \sum_{\nu=0}^{y}\log(a+\nu)\right),$$

$$\sum_{\nu=0}^{y} \log(a+\nu) = y \log y - y + \left(\frac{1}{2}+a\right) \log y + \log \sqrt{2\pi} - \log \Gamma(a) + \{1\}^{*)},$$

$$\sum_{\nu=0}^{y} \log(\lambda+\nu\Delta) = \sum_{\nu=0}^{y} \left(\log \Delta + \log\left(\frac{\lambda}{\Delta}+\nu\right)\right)$$

$$= y \log y + y(\log \Delta - 1) + \left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{\Delta}\right) \log y + \log \Delta + \log \sqrt{2\pi} - \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right) + \{1\}.$$

Multiplicirt man für $D > 0$ diese Gleichung mit $\left(\frac{D}{\lambda}\right)$ und summirt über $\lambda = 1, 2, \dots D$, so ergiebt sich wegen (94.) und (99.)

$$\sum_{\lambda=1}^{D} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \sum_{\nu=0}^{y} \log(\lambda+\nu D) = -\sum_{\lambda=1}^{D} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{D}\right) + \{1\}.$$

Also nähert sich für $n = \infty$, wenn

$$g_n = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{D}\right]D} \left(\frac{D}{m}\right) \log m = \sum_{\lambda=1}^{D} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{D}\right]-1} \log(\lambda+\nu D)$$

gesetzt wird, g_n einer Grenze g. Es nähert sich also a fortiori das arithmetische Mittel der x ersten Zahlen g_n $(n = 1, 2, \dots x)$

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} g_n$$

dieser Grenze. $\sum_{n=1}^{x} g_n$ ist aber die erste Doppelsumme der rechten Seite von (100.); da, wie schon bewiesen, die zweite Doppelsumme nur $= O(\log x)$ ist, so existirt $\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} S_n$ und es ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} S_n = -\sum_{\lambda=1}^{D} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{D}\right);$$

auch ist für jedes $s > 0$

$$S_x = O(\log x) = \{x^s\}.$$

Die divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \log n$ ist also im Sinne des Satzes auf S. 128 summirbar, und es ergiebt sich mit voller Strenge aus jenem Satze

$$\lim_{s=0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\log n}{n^s} = -\sum_{\lambda=1}^{D} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{D}\right),$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{2}{\sqrt{D}} \sum_{\lambda=1}^{D} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{D}\right),$$

*) d. h. der Rest nähert sich für $y = \infty$ der Grenze 0.

Poincaré für den *Gauss*schen quadratischen Körper $P(i)$, d. h. den Körper der complexen Zahlen $a+bi$ mit rationalen a, b. Herrn *Poincarés**) Resultat lautet: Wenn d eine beliebig kleine positive Grösse ist, so ist im Körper $P(i)$ $\frac{\psi(x)}{x}$ für passende, oberhalb jeder Grenze wählbare Werthe von x kleiner als $1+d$, ebenso für passende, oberhalb jeder Grenze wählbare x grösser als $1-d$; $\frac{\psi(x)}{x}$ kann also, wenn es sich für $x=\infty$ einem endlichen Werthe nähert, nur gegen 1 convergiren. Dasselbe gilt (im Körper $P(i)$) von den Quotienten $\frac{\vartheta(x)}{x}$ und $\pi(x)$: $\frac{x}{\log x}$, wo $\pi(x)$ die Anzahl der Primideale bezeichnet, deren Norm $\leqq x$ ist.

Durch Betrachtungen functionentheoretischer Natur lassen sich die *Poincaré*schen Sätze sehr leicht nachweisen; Herr *Staniewitsch***) hat darauf aufmerksam gemacht, dass sie sich leicht aus den *Mertens*schen Untersuchungen über die auf alle bis x gelegenen Primzahlen einer arithmetischen Progression (hier $4m+1$) erstreckte Summe $\Sigma \frac{1}{p}$ ergeben; Herr *Phragmén****) hat darauf hingewiesen, dass sie aus einem allgemeinen Satze†) von ihm über Integrale der Form $\int_a^\infty \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx$ folgen; ein anderer analytischer Beweis mit Hilfe *Dirichlet*scher Reihen wird unten††) gegeben werden. Das Wesentliche der *Poincaré*schen Beweismethode liegt jedoch in ihrer Analogie zur *Tschebyschef*schen Behandlung der Primzahlentheorie; sie ist so rein arithmetisch, als es der Nachweis eines auf einen Grenzwerth bezüglichen Satzes sein kann. Aber im Einzelnen ist sie unnöthig complicirt; es lässt sich der von Herrn *Poincaré* gegebene Beweis†††) seiner

---

*) Mit der auf S. 114, Anm. 1 angedeuteten Aenderung der Bezeichnungsweise.

**) „Sur un théorème arithmétique de M. *Poincaré*“, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 114, 1892, S. 109—112.

***) „Sur la distribution des nombres premiers“, ebenda, S. 337—340.

†) „Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de *Riemann*“, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. 48, 1891, S. 600.

††) S. 144—148.

†††) l. c., S. 51—68.

Von den in den vorigen Abschnitten über Ideale entwickelten asymptotischen Formeln brauche ich hier nur (68.) und (20.), beide auch nur in der ersten Annäherung

$$(102.)\qquad T(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \log N\mathfrak{n} \backsim a\, x \log x^{*)},$$

$$(103.)\qquad R(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} \backsim a \log x;$$

ich erinnere ferner an den bei deren Beweise verwendeten *Dedekind*schen Satz**)

$$(104.)\qquad [x] = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} 1 \backsim a\, x$$

und an die *Poincaré*sche Identität***)

$$(76.)\qquad T(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right).$$

Ich behaupte zunächst:

Wenn $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x}$ ***und*** $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}$ ***existiren, so sind diese Grenzwerthe*** $= 1$; ***wenn die Grenzwerthe nicht existiren, so oscilliren die Quotienten*** $\frac{\psi(x)}{x}$ ***und*** $\frac{\vartheta(x)}{x}$ ***zwischen zwei endlichen Unbestimmtheitsgrenzen, von denen die kleinere*** $\leqq 1$ ***und die grössere*** $\geqq 1$ ***ist***†).

---

*) $g_1(x) \backsim g_2(x)$ bezeichnet die asymptotische Gleichheit der beiden Functionen $g_1(x)$ und $g_2(x)$; es bedeutet also, dass der Quotient $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ sich für $x = \infty$ der Grenze 1 nähert.

**) Vergl. S. 80, 114 und 115.

***) Vergl. S. 120.

†) Dies ist für quadratische Körper bekannt, indem aus den Untersuchungen der Herren *Hadamard* (l. c., S. 219), und *de la Vallée-Poussin* (l. c., S. 281—362) über die Primzahlen einer arithmetischen Progression sogar die Existenz jener Grenzwerthe (für quadratische Körper) sich folgern lässt; ferner hat Herr *Torelli* („Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato", Atti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Ser. 2ª, Bd. 11, 1901, § 99—112, S. 144—179) die *Poincaré*schen Sätze auf den Körper der p-ten Einheitswurzeln ausgedehnt, wo p eine Primzahl bezeichnet; dies ist eben einer jener Fälle, in denen man die Zerlegungen der rationalen Primzahlen in Primideale beherrscht und Anschluss an die Theorie der arithmetischen Progression gewinnen kann (vergl. oben, S. 98). Die Betrachtungen des Textes gelten für beliebige algebraische Zahlkörper.

Es genügt, die Behauptungen für $\psi(x)$ zu beweisen; denn es ist*)

$$\psi(x) - \vartheta(x) = O(\sqrt{x}) = |x|.$$

Zum Nachweise der Behauptungen für $\psi(x)$ ist ein Widerspruch aus jeder der beiden Annahmen herzuleiten:

„Es giebt zwei positive Grössen d und ω, so dass für alle $x \geqq \omega$

(105.) $$\psi(x) > (1+d)x$$

bezw. für alle $x \geqq \omega$

(106.) $$\psi(x) < (1-d)x$$

ist."

1) Wäre für alle $x \geqq \omega$

(105.) $$\psi(x) > (1+d)x,$$

so wäre für $N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}$

$$\psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) > (1+d)\frac{x}{N\mathfrak{n}},$$

also

$$T(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) \geqq \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) > (1+d) \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}} \frac{x}{N\mathfrak{n}}$$

$$= (1+d)x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}} \frac{1}{N\mathfrak{n}}.$$

Nach (103.) ist aber

$$R\left(\frac{x}{\omega}\right) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}} \frac{1}{N\mathfrak{n}} \backsim \alpha(\log x - \log \omega) \backsim \alpha \log x,$$

also für alle x von einem gewissen x_0 an

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}} \frac{1}{N\mathfrak{n}} > \alpha \frac{1+\frac{d}{2}}{1+d} \log x.$$

Für alle $x \geqq x_0$ wäre also

$$T(x) > \alpha\left(1+\frac{d}{2}\right) x \log x,$$

*) Vergl. S. 123.

was mit

(102.) $$T(x) \sim \alpha x \log x$$

im Widerspruch steht. Die Annahme (105.) ist daher unzulässig. Jede Zahl >1 wird also für passend gewählte beliebig grosse Werthe von x durch den Quotienten $\frac{\psi(x)}{x}$ unterschritten.

2) Wäre für alle $x \geqq \omega$

(106.) $$\psi(x) < (1-d)x,$$

so wäre für $N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}$

$$\psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) < (1-d)\frac{x}{N\mathfrak{n}},$$

also

$$T(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) \leqq \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right) + \sum_{\frac{x}{\omega} < N\mathfrak{n} \leqq x} \psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)$$

$$< (1-d) \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \frac{x}{\omega}} \frac{x}{N\mathfrak{n}} + \sum_{\frac{x}{\omega} < N\mathfrak{n} \leqq x} \psi(\omega) \leqq (1-d)x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} + \psi(\omega) \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} 1$$

$$= (1-d)x R(x) + \psi(\omega)[x].$$

Aus (103.), (104.) folgt, dass $x_0 \geqq \omega$ so bestimmt werden kann, dass für alle $x \geqq x_0$

$$R(x) < \alpha \frac{1-\frac{d}{2}}{1-d} \log x, \quad \psi(\omega)[x] < \alpha \frac{d}{4} x \log x$$

ist; also wäre für alle $x \geqq x_0$

$$T(x) < \alpha\left(1-\frac{d}{2}\right) x \log x + \alpha \frac{d}{4} x \log x = \alpha\left(1-\frac{d}{4}\right) x \log x,$$

was der asymptotischen Gleichung (102.) widerspricht. Die obere Unbestimmtheitsgrenze von $\psi(x)$ ist also $\geqq 1$, womit alle Theile des Satzes auf S. 140 bewiesen sind.

Aus demselben ergiebt sich die Folgerung:

Der Quotient der Anzahl $\pi(x)$ der Primideale, deren Norm $\leqq x$ ist, durch $\frac{x}{\log x}$ nähert sich entweder der Grenze 1 oder oscillirt zwischen zwei Unbestimmtheitsgrenzen u, U, für welche $u \leqq 1 \leqq U$ ist.

In der That ist*)

*) Vergl. S. 139.

$$\pi(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{\vartheta(n)-\vartheta(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^{x} \vartheta(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\vartheta(x)}{\log(x+1)}$$

$$= \sum_{n=2}^{x} \frac{\vartheta(n)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n \log(n+1)} + \frac{\vartheta(x)}{\log(x+1)} = O\sum_{n=2}^{x} \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{\log n\cdot\log n} + \frac{\vartheta(x)}{\log x}\,\frac{\log x}{\log(x+1)}$$

$$= O\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + \frac{\vartheta(x)}{\log x}\,\frac{\log x}{\log x + O\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) + \frac{\vartheta(x)}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{x\log x}\right)\right)$$

$$= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),$$

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} = O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

$$(107.)\qquad \lim_{x=\infty}\left(\frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x}\right) = 0.$$

Die für den Quotienten $\frac{\vartheta(x)}{x}$ bewiesenen Sätze gelten also auch für den Quotienten $\frac{\pi(x)\log x}{x}$; denn wäre für alle $x \geqq \omega$

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} < 1-d \text{ bezw.} > 1+d,$$

so würde für alle x von einem gewissen ω_1 an wegen (107.)

$$\frac{\vartheta(x)}{x} < 1-\frac{d}{2} \text{ bezw.} > 1+\frac{d}{2}$$

sein.

Man erkennt ferner aus (107.), dass, wenn einer der Grenzwerthe $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ und $\frac{\vartheta(x)}{x}$ existirt, d. h. $= 1$ ist, auch der andere existirt und $= 1$ ist.

Der Nachweis der Existenz jener Grenzwerthe für beliebige algebraische Zahlkörper kann bei dem gegenwärtigen Stande der Idealtheorie noch nicht geführt werden.*)

Ich habe Werth darauf gelegt, die Sätze dieses Abschnittes mit Hilfe von Betrachtungen zu beweisen, welche die von Herrn *Poincaré* angeregte Verallgemeinerung der *Tschebyschef*schen Primzahlentheorie auf algebraische Zahlkörper ausführen; die am Schlusse seiner Arbeit**) ausge-

---

*) Vergl. S. 98 und Anm. 4 zu S. 140.

**) l. c., S. 68.

drückte Vermuthung, dass die Constante α aus dem Resultat herausfällt, hat ihre Bestätigung gefunden. Aus der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen ergiebt sich folgendermassen sehr einfach, dass die Grenzwerthe $\frac{\psi(x)}{x}$, $\frac{\vartheta(x)}{x}$ und $\frac{\pi(x)\log x}{x}$, falls sie für einen bestimmten Körper $\varkappa$ existiren, unabhängig von Grad und Natur des Körpers den Werth 1 haben und dass anderenfalls die Unbestimmtheitsgrenzen den Werth 1 einschliessen: Es ist für $s > 1$

$$\log \zeta_\varkappa(s) = -\sum_{\mathfrak{p}} \log\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} + \mathfrak{F}(s),$$

wo die *Dirichlet*sche Reihe

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{3s}} + \cdots$$

für $s > \frac{1}{2}$ convergirt; durch gliedweise Differentiation ergiebt sich

$$\frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} + \mathfrak{F}'(s),$$

wo $\mathfrak{F}'(s)$ für $s > \frac{1}{2}$ convergirt, also für $s = 1$ endlich bleibt; da nun $s = 1$ ein Pol erster Ordnung der $\zeta_\varkappa$-Function ist, ist

$$\lim_{s=1}\, (s-1)\frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)} = -1,$$

also*)

$$\lim_{s=1}\, (s-1)\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} = 1,$$

$$(108.)\quad \lim_{s=1}(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n\, G(n)}{n^s} = \lim_{s=1}\,(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\vartheta(n)-\vartheta(n-1)}{n^s} = 1.$$

Daraus folgt aber nach dem *Dirichlet-Dedekind*schen Satz**), dass, wenn

$$\lim_{x=\infty}\frac{\vartheta(x)}{x} = \lim_{x=\infty}\frac{\sum_{n=1}^{x}\log n\, G(n)}{x}$$

existirt, dieser Limes gleich 1 ist; denn wenn sein Werth mit M bezeichnet wird, so würde eben der Limes (108.) jenem Satze zufolge auch gleich M sein, so dass $M = 1$ sein müsste.

---

*) Vergl. S. 84.

**) Vergl. S. 129, Anm. 1.

Dass $\frac{\vartheta(x)}{x}$ für passend gewählte beliebig grosse x jede Zahl $1+d$ unterschreitet und jede Zahl $1-d$ überschreitet, folgt durch Anwendung des *Hölder*schen Satzes*): Wenn a_n für $n=\infty$ zwischen endlichen Unbestimmtheitsgrenzen u, U oscillirt $(u \leqq U)$, so oscillirt bei Annäherung an $s=1$ das Product

$$(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

zwischen zwei endlichen Unbestimmtheitsgrenzen v, V, für welche

$$u \leqq v \leqq V \leqq U$$

ist. Würde für $a_n = \frac{\vartheta(n)}{n}$ $u > 1$ oder $U < 1$ sein, so würde dies in Widerspruch damit stehen, dass für den gegenwärtigen Fall wegen (108.)

$$1 = \lim_{s=1}(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta(n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right) = \lim_{s=1}(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta(n)\frac{s}{n^{s+1}}$$

$$= \lim_{s=1}(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\vartheta(n)}{n}}{n^s},$$

also $v = V = 1$ ist.

Dieselben Resultate für $\psi(x)$ ergeben sich direct aus

$$(109.)\qquad \sum_{\mathfrak{p}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s}+\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{2s}}+\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{3s}}+\cdots = -\frac{\zeta_x'(s)}{\zeta_x(s)}.$$

Die rechte Seite von (109.) nähert sich, mit $s-1$ multiplicirt, für $s=1$ dem Werthe 1, und die linke Seite ist nichts anderes als $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$, wo

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = \sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\log N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{p}^2\leqq x}\log N\mathfrak{p} + \sum_{N\mathfrak{p}^3\leqq x}\log N\mathfrak{p}+\cdots = \psi(x).$$

Also ist $c_n = \psi(n)-\psi(n-1)$,

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)-\psi(n-1)}{n^s} = 1,$$

was zu analogen Folgerungen führt wie (108.).

Was drittens die Function $\pi(x)$ anbetrifft, so entspricht ihr die *Dirichlet*sche Reihe

*) l. c., S. 543.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(n)-\pi(n-1)}{n^s}=\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}=\log\zeta_x(s)-\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{2s}}-\frac{1}{3}\sum\frac{1}{N\mathfrak{p}^{3s}}-\cdots$$

$$(110.)\qquad =\log\frac{1}{s-1}+\left\{\log\frac{1}{s-1}\right\}.$$

Ich gebrauche nun den auf eine *Dirichlet*sche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ mit reellen Coefficienten bezüglichen *Hülfssatz*): Wenn der Quotient*

$$S_x:\frac{x}{\log x}=\sum_{n=1}^{x}a_n:\frac{x}{\log x}$$

zwischen den endlichen Unbestimmtheitsgrenzen u und U schwankt ($u\leqq U$) und

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}:\log\frac{1}{s-1},$$

wenn s von rechts an 1 heranrückt, zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen v und V schwankt, so ist

$$u\leqq v\leqq V\leqq U.$$

Beweis: Nach Annahme eines $d>0$ ist nach Voraussetzung von einem gewissen $n=n_0$ ab der Quotient

$$\frac{S_n\log n}{n}<U+d.$$

Nun ist aber für $s>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}S_n\Big(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\Big)$$

$$=\sum_{n=1}^{n_0-1}S_n\Big(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\Big)+\sum_{n=n_0}^{\infty}S_n\Big(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\Big).$$

Hierin ist die erste Summe $=\left\{\log\frac{1}{s-1}\right\}$, da sie für $s=1$ sogar endlich bleibt; die zweite ist

$$<\sum_{n=n_0}^{\infty}(U+d)\frac{n}{\log n}\Big(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\Big)=(U+d)\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{n}{\log n}\frac{s}{n^{s+1}}+\left\{\log\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$=(U+d)s\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^s\log n}+\left\{\log\frac{1}{s-1}\right\}.$$

*) Der Specialfall $u=U$ dieses Satzes, wo also $v=V=U$ behauptet wird, steht schon bei *Berger*, l. c. (vergl. S. 72, Anm. 1), S. 20—21.

Nun ist aber

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n} = -\sum_{n=2}^{\infty} \int_{\infty} \frac{du}{n^u} = -\int_{\infty}^{s} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^u} du = -\int_{\infty}^{s} (\zeta(u)-1) du$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n} + \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\} = -\int_{\infty}^{s} (\zeta(u)-1)\, du + \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= -\int_{2}^{s} \frac{du}{u-1} + \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\}$$

$$(111.) \qquad = \log \frac{1}{s-1} + \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\}.$$

Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} < (U+d) s \log \frac{1}{s-1} + \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\} = (U+d) \log \frac{1}{s-1} + \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\},$$

d. h. es ist für alle hinreichend kleinen positiven $s-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} < (U+d) \log \frac{1}{s-1} + d \log \frac{1}{s-1} = (U+2d) \log \frac{1}{s-1}.$$

Dies bedeutet

$$V \leqq U.$$

Ebenso lässt sich zeigen:

$$u \leqq v;$$

denn nach Annahme von d ist von $n = n_1$ ab

$$\frac{S_n \log n}{n} > u - d,$$

also unter Anwendung von (111.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{n_1-1} S_n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) + \sum_{n=n_1}^{\infty} S_n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\} + \sum_{n=n_1}^{\infty} S_n \frac{s}{n^{s+1}} > \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\} + \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{(u-d)s}{n^s \log n}$$

$$= \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\} + (u-d)\, s \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n^s \log n} = (u-d) \log \frac{1}{s-1} + \left\{\log \frac{1}{s-1}\right\},$$

also für alle hinreichend kleinen positiven $s-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} > (u-2d) \log \frac{1}{s-1},$$

d. h.

$$v \geqq u.$$

Dieser Hülfssatz ergiebt, auf

$$a_n = G(n)$$

angewendet, zunächst: Wenn

$$(112.)\qquad \lim_{x=\infty} \sum_{n=1}^{x} G(n) : \frac{x}{\log x} = \lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x}$$

existirt, so ist dieser Limes gleich

$$(113.)\qquad \lim_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)}{n^s} : \log\frac{1}{s-1} = \lim_{s=1} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} : \log\frac{1}{s-1}.$$

Da nun nach (110.) der Limes (113.) existirt und 1 ist, so kann der Limes (112.), wenn er existirt, nur 1 sein; genauer: weil $v = V = 1$ ist, ist

$$u \leqq 1 \leqq U.$$

Ebenso folgt aus dem Satze auf S. 146 als Specialfall: wenn eine gewisse Klasse von ganzen Zahlen z_ϱ so beschaffen ist, dass der Grenzwerth

$$(114.)\qquad \lim_{s=1} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{1}{z_\varrho^s} : \log\frac{1}{s-1}$$

existirt und $= a$ ist, so nähert sich der Quotient der Anzahl der bis x gelegenen Zahlen z_ϱ durch $\frac{x}{\log x}$ entweder der Grenze a, oder er oscillirt zwischen zwei Unbestimmtheitsgrenzen u, U, deren Intervall die Zahl a enthält: $u \leqq a \leqq U$. Die Voraussetzung ist z. B. nach *Kronecker**) und Herrn *Frobenius***) für die Klasse der rationalen Primzahlen, in denen genau ν Primideale ersten Grades eines gegebenen Körpers aufgehen, erfüllt. *Kronecker* nannte den Grenzwerth (114.), falls er existirt, die Dichtigkeit der Primzahlen jener Art und wies seine Existenz in gewissen Fällen nach; Herr *Frobenius* führte den Nachweis für einen beliebigen Körper und bestimmte die Werthe jener Dichtigkeiten. Das Wort Dichtigkeit erhält seine Berechtigung eigentlich erst durch die oben gemachte Bemerkung über die Anzahl der unterhalb x gelegenen Zahlen der betreffenden Art.

Zum Abschlusse der Betrachtungen über die Vertheilung der Primideale sollen noch aus dem im vorigen Abschnitt bewiesenen Satz

---

*) „Ueber die Irreductibilität von Gleichungen", Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1880, S. 155—162.

**) „Ueber Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe", ebenda, 1896, S. 689—703.

$$(67.)\qquad \sum_{N\mathfrak{p}\leqq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log x + O(1)$$

zweierlei Folgerungen gezogen werden.

Zunächst soll über die Summe $\sum\limits_{N\mathfrak{p}\leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}}$ ein Resultat hergeleitet werden, welches das *Mertens*sche*) über $\sum\limits_{p\leqq x} \frac{1}{p}$ als Specialfall umfasst; nach (67.) ist

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{\log n\, G(n)}{n} = \log x + O(1),$$

also wegen

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{1}{n} = \log x + O(1),$$

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{\log n\, G(n) - 1}{n} = O(1).$$

Also convergirt nach dem auf S. 126 citirten Convergenzkriterium

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n\, G(n) - 1}{n \log n}.$$

Genauer ergiebt sich für den Rest dieser Reihe, wenn

$$\frac{\log n\, G(n) - 1}{n} = c_n$$

gesetzt wird, aus

$$C_x = \sum_{n=1}^{x} c_n = O(1)$$

$$\sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{c_n}{\log n} = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{C_n - C_{n-1}}{\log n} = \sum_{n=x+1}^{\infty} C_n \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) - \frac{C_x}{\log(x+1)}$$

$$= O \sum_{n=x+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

also

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{\log n\, G(n) - 1}{n \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n\, G(n) - 1}{n \log n} + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

*) l. c. (vergl. S. 113, Anm. 2), S. 52.

d. h.

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}}=\sum_{n=2}^{x}\frac{G(n)}{n}=\sum_{n=2}^{x}\frac{1}{n\log n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n\, G(n)-1}{n\log n}+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$=\int_{e}^{x}\frac{du}{u\log u}+D_{\varkappa}+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

$$(115.)\qquad =\log\log x+D_{\varkappa}+O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

wo $D_{\varkappa}$ eine Constante bezeichnet; der Werth der Constanten $D_{\varkappa}$ kann, nachdem ihre Existenz feststeht, durch Betrachtungen gefunden werden, welche denen des ersten Abschnittes analog sind. Der Kürze wegen will ich den *Mertens*schen Satz für $\sum\limits_{p\leqq x}\frac{1}{p}$ bei der Bestimmung von $D_{\varkappa}$ anwenden. Es ergiebt sich, wenn man die Gleichung (115.) für zwei beliebige Körper $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ mit den Primidealen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ ansetzt und subtrahirt, die Existenz des Grenzwerthes

$$\lim_{x=\infty}\left(\sum_{N\mathfrak{p}_1\leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}_1}-\sum_{N\mathfrak{p}_2\leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}_2}\right)=D_{\varkappa_1}-D_{\varkappa_2}.$$

Versteht man also unter $\varkappa_1$ den gegebenen Körper $\varkappa$ und unter $\varkappa_2$ den Körper der rationalen Zahlen, so ist die unendliche *Dirichlet*sche Reihe

$$\lim_{x=\infty}\left(\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}-\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},$$

(a_n gleich der Anzahl der Darstellungen von n als $N\mathfrak{p}$, bezw., wenn n eine Primzahl ist, gleich dieser Anzahl minus 1) für $s=1$ convergent. Daher ist

$$\lim_{x=\infty}\left(\sum_{N\mathfrak{p}\leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{p}}-\sum_{p\leqq x}\frac{1}{p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{s=1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

$$(116.)\qquad =\lim_{s=1}\left(\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}-\sum_{p}\frac{1}{p^s}\right).$$

Nun ist für $s>1$

$$\log\zeta_{\varkappa}(s)=\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}+\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{2s}}+\frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{3s}}+\cdots$$

$$=\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}+\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^2}+\frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^3}+\cdots+\{1\}$$

$$=\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}+H_{\varkappa}+\{1\},$$

wo die Constante $H_{\varkappa}$ als eine nur vom Körper $\varkappa$ abhängige Zahl

$$(117.)\qquad H_{\varkappa}=\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^2}+\frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{p}}\frac{1}{N\mathfrak{p}^3}+\cdots$$

das Schlussresultat lautet somit

$$(120.)\qquad \sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \log\log x + \log \alpha + C - H_x + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Es soll noch eine andere Folgerung aus dem Satze (67.) gezogen werden: es existirt ihm zufolge eine positive Constante c, so dass für alle $x \geqq 1$

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log x + \Theta c \qquad (-1<\Theta<1)$$

ist. Also ist

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leq e^{2c}x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \log(e^{2c}x) + \Theta_1 c = \log x + 2c + \Theta_1 c \qquad (-1<\Theta_1<1)$$

und durch Subtraction

$$\sum_{x<N\mathfrak{p}\leq e^{2c}x} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = 2c + \Theta_1 c - \Theta c > 2c - c - c > 0.$$

Also muss zwischen x (excl.) und $e^{2c}x$ (incl.) mindestens ein $N\mathfrak{p}$ liegen, da sonst die Summe 0 wäre. Das bedeutet, $e^{2c} = b$ gesetzt:

Es existirt für einen gegebenen algebraischen Körper $\varkappa$ eine Zahl b, so dass für alle $x \geqq 1$ mindestens ein Primideal existirt, dessen Norm zwischen x (excl.) und bx (incl.) liegt.

Dies verallgemeinert den unter dem Namen des *Bertrand*schen*) Postulates bekannten Satz der Zahlentheorie, der gerade die Veranlassung zu *Tschebyschef*s grundlegender Arbeit gewesen ist: Zwischen x (excl.) und $2x-2$ (excl.) liegt für alle $x > \frac{7}{2}$ mindestens eine Primzahl, d. h. zwischen x (excl.) und $2x$ (incl.) liegt für alle $x \geqq 1$ mindestens eine Primzahl. Die Constante b, deren Existenz im Vorangegangenen für jeden algebraischen Körper nachgewiesen ist, kann also für den natürlichen Körper gleich 2 gewählt werden.**)

---

*) „Mémoire sur le nombre des valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferme", Journal de l'école polytechnique, Bd. 18 (Heft 30), 1845, S. 129.

**) Wenn $\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x}$ für alle algebraischen Körper existirt, so giebt es für jeden algebraischen Körper nach Annahme jedes $b > 1$ ein ξ, so dass für alle $x \geqq \xi$ mindestens ein Primideal vorhanden ist, dessen Norm zwischen x und bx liegt.

Band 125. Heft I/II.

Inhaltsverzeichniss.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich unter der Adresse:**
An die Redaction des Journals für die reine und angewandte **Mathematik,** Professor Dr. Kurt Hensel. Marburg a./L., Universitätsstrasse 54.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 125.

Heft III.

Ausgegeben den 14. Januar.



Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1903.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

diese Kenntniss und ausserdem mit geringerem Aufwand von Rechnung zum Ziele gelangen kann. Für beliebige Körper höheren Grades ist man auf diesen Weg angewiesen, da man keine analoge Darstellung der Function $F(n)$ besitzt. Aus der *Weber*schen Relation*)

$$[x] = \sum_{N\mathfrak{k} \leqq x} 1 = \sum_{n=1}^{x} F(n) = \alpha x + \gamma_x = \alpha x + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

ergiebt sich

$$\begin{aligned}\sum_{N\mathfrak{k} \leqq x} N\mathfrak{k} &= \sum_{n=1}^{x} n\, F(n) = \sum_{n=1}^{x} n\,([n]-[n-1]) \\ &= \sum_{n=1}^{x} n\,(\alpha + \gamma_n - \gamma_{n-1}) \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{x} n + \sum_{n=1}^{x} \gamma_n\,(n-(n+1)) + \gamma_x(x+1) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{2}x^2 + O(x)\right) + O\int_1^x u^{1-\frac{1}{k}}\,du + O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\,x\right) \\ &= \frac{\alpha}{2}x^2 + O(x) + O\left(x^{2-\frac{1}{k}}\right) + O\left(x^{2-\frac{1}{k}}\right),\end{aligned}$$

$$(123.)\qquad \sum_{N\mathfrak{k} \leqq x} N\mathfrak{k} = \frac{\alpha}{2}x^2 + O\left(x^{2-\frac{1}{k}}\right).$$

Setze ich (123.) in (122.) ein, so erhalte ich

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{N\mathfrak{m} \leqq x} \mu(\mathfrak{m}) \left(\frac{\alpha}{2}\frac{x^2}{N\mathfrak{m}^2} + O\left(\frac{x^{2-\frac{1}{k}}}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{1}{k}}}\right)\right) \\ &= \frac{\alpha}{2}x^2 \sum_{N\mathfrak{m} \leqq x} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} + x^{2-\frac{1}{k}}\, O \sum_{N\mathfrak{m} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{1}{k}}}.\end{aligned}$$

Der Fall $k = 1$ des natürlichen Rationalitätsbereiches ist durch Herrn ***Mertens*** erledigt; es kann also $k \geqq 2$ angenommen werden; alsdann convergirt

$$\sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\infty} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{1}{k}}},$$

sodass

$$\sum_{N\mathfrak{m} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{m}^{2-\frac{1}{k}}} = O\,(1).$$

*) Vergl. S. 81 und 115.

Ferner convergirt $\sum\limits_{N\mathfrak{m}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2}$ mit dem Reste

$$\begin{aligned}\sum_{N\mathfrak{m}=x+1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^2} &= O \sum_{N\mathfrak{m}=x}^{\infty} \frac{1}{N\mathfrak{m}^2} = O \sum_{n=x}^{\infty} \frac{F(n)}{n^2} = O \sum_{n=x}^{\infty} \frac{[n]-[n-1]}{n^2} \\ &= O \sum_{n=x}^{\infty} [n]\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + O\frac{[x]}{x^2} \\ &= O \sum_{n=x}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n^3} + O\left(\frac{1}{x}\right) = O\int_x^{\infty} \frac{du}{u^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{N\mathfrak{m}=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathfrak{m})}{N\mathfrak{m}^s} = \frac{1}{\zeta_x(s)} \qquad (\Re(s) > 1)^{*})$$

ist also

$$\Phi(x) = \frac{\alpha}{2\zeta_x(2)}\, x^2 + O\left(x^{2-\frac{1}{k}}\right) \qquad (k \geqq 2),$$

was für den Körper $P(i)$ in die *Mertens*sche**) Formel übergeht.

2) Es bezeichne $\Theta(\mathfrak{m})$ die Anzahl der Theiler des Ideals $\mathfrak{m}$, so ist

$$(124.)\quad \tau(x) = \sum_{N\mathfrak{m} \leqq x} \Theta(\mathfrak{m}) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \left[\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right] = 2 \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right] - \left[\sqrt{x}\right]^2.$$

Denn in

$$N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{m}) \leqq x$$

ist entweder $N\mathfrak{a} \leqq \sqrt{x}$, was $\sum\limits_{N\mathfrak{a} \leqq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right]$ Male eintritt, da ja für jedes $\mathfrak{a}$ die Anzahl der zulässigen $\mathfrak{b}$ gleich $\left[\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right]$ ist; oder es ist $N\mathfrak{b} \leqq \sqrt{x}$, was ebenso oft eintritt; dabei sind aber die Idealpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ doppelt gezählt, für welche sowohl $N\mathfrak{a} \leqq \sqrt{x}$ als auch $N\mathfrak{b} \leqq \sqrt{x}$; also ist noch deren Anzahl $[\sqrt{x}] \cdot [\sqrt{x}]$ zu subtrahiren, wodurch sich genau die rechte Seite von (124.) ergiebt. Der Satz (124.) ist für $x = P(i)$ von Herrn *Mertens****) (jedoch nicht auf diesem einfachsten Wege) bewiesen worden.

---

*) Vergl. S. 119.

**) l. c., S. 323.

***) l. c., S. 324—325; vergl. auch Herrn *Gegenbauers* Arbeiten: „Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen", Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 50, Abth. 1, 1885, S. 153—184; „Ueber die ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien, Abth. 2, Bd. 91, 1895, S. 1047—1058; „Wahrscheinlichkeiten im Gebiet der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen", ebenda Abth. 2ª, Bd. 98, 1889,

(124.) liefert

$$\tau(x) = 2 \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \sqrt{x}} \left(\alpha \frac{x}{N\mathfrak{n}} + O\left(\frac{x}{N\mathfrak{n}}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right) - \left(\alpha\sqrt{x} + O\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}\right)\right)^2$$

$$(125.) \qquad = 2\alpha x \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{n}} + x^{1-\frac{1}{k}} O \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}} - \alpha^2 x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right).$$

Hierin ist

$$(126.) \qquad \sum_{N\mathfrak{n} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = R(\sqrt{x}) = \frac{\alpha}{2} \log x + \beta + O\left(x^{-\frac{1}{2k}}\right)$$

und

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{[n]-[n-1]}{n^{1-\frac{1}{k}}} = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} [n]\left(\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\frac{1}{k}}}\right) + O\left(\frac{[\sqrt{x}]}{x^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)}}\right)$$

$$= O\int_1^{\sqrt{x}} \frac{du}{u^{1-\frac{1}{k}}} + O\left(x^{\frac{1}{2k}}\right)$$

$$(127.) \qquad = O\left(x^{\frac{1}{2k}}\right).$$

(126.) und (127.) ergeben, in (125.) eingesetzt:

$$(128.) \qquad \tau(x) = \alpha^2 x \log x + (2\alpha\beta - \alpha^2) x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

wo β nach S. 81 gleich dem constanten Gliede in

$$\zeta_x(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \beta + \beta_1(s-1) + \cdots$$

ist. α und β lassen sich auch folgendermassen ausdrücken. Da

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \cdots$$

ist, so ist für hinreichend kleine $s-1$

$$\frac{\zeta_x(s)}{\zeta(s)} = \frac{\alpha + \beta(s-1) + \cdots}{1 + C(s-1) + \cdots} = (\alpha + \beta(s-1) + \cdots)(1 - C(s-1) + \cdots)$$

$$= \alpha + (\beta - \alpha C)(s-1) + \cdots,$$

S. 635—646; „Ueber die aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen", ebenda, Bd. 101, 1892, S. 984—1012; „Einige arithmetische Sätze", Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 1, 1890, S. 39—46. Die dem Satze (124.) für $x = P(1)$ entsprechende Gleichung $\sum_{n \leqq x} \left[\frac{x}{n}\right] = 2 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}]^2$, welche späteren Autoren zugeschrieben zu werden pflegt, steht schon bei ***Meissel***, l. c. (vergl. S. 118, Anm. 1), S. 306.

also in nicht misszuverstehender Schreibweise

$$\alpha = \frac{\zeta_x}{\zeta}(1),$$

(129.) $$\beta = \alpha C + \lim_{s=1} \frac{d}{ds}\left(\frac{\zeta_x(s)}{\zeta(s)}\right) = C\frac{\zeta_x}{\zeta}(1) + \left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)'(1).$$

Das *Mertens*sche, auf $P(i)$ bezügliche Resultat erhält man aus (128.) folgendermassen: α ist gleich dem $\lim_{x=\infty}$ des vierten Theiles*) des Quotienten der Anzahl der Gitterpunkte a, b in und auf dem Kreise $a^2 + b^2 = x$ durch x, also $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Nach (46.) ist hier

$$\frac{\zeta_x}{\zeta}(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{m}\right)\frac{1}{m^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots,$$

$$\left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)'(s) = \frac{\log 3}{3^s} - \frac{\log 5}{5^s} + \frac{\log 7}{7^s} - \cdots,$$

(130.) $$\beta - \frac{\pi}{4}C = \left(\frac{\zeta_x}{\zeta}\right)'(1) = \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 7}{7} - \cdots \text{**)},$$

in Uebereinstimmung mit dem *Mertens*schen Resultat.***)

3) $\psi(\mathfrak{n})$ bezeichne die Anzahl der Zerlegungen des Ideals $\mathfrak{n}$ in zwei theilerfremde Factoren. Dann ist $\psi(\mathfrak{n})$ auch die Anzahl der quadratfreien Theiler von $\mathfrak{n}$; denn jedem quadratfreien Theiler entspricht ja die Zerlegung von $\mathfrak{n}$ in zwei theilerfremde Factoren, bei welcher der erste Factor jedes in jenem Theiler vorkommende Primideal zur selben Potenz enthält wie $\mathfrak{n}$, aber durch kein anderes Primideal theilbar ist, und umgekehrt entspricht jeder solchen Zerlegung ein quadratfreier Theiler von $\mathfrak{n}$. Es ist also auch

$$\psi(\mathfrak{n}) = \sum_{\mathfrak{b}} \mu^2 \mathfrak{b},$$

wo $\mathfrak{b}$ alle Theiler von $\mathfrak{n}$ durchläuft. Nun ist $\tau(x)$ die Anzahl aller Theiler aller Ideale, deren Norm $\leqq x$ ist. Diese Theiler ordne ich nach ihrem grössten quadratischen Divisor. Es giebt, wenn

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \psi(\mathfrak{n}) = \Psi(x)$$

gesetzt wird, $\Psi\left(\frac{x}{N\mathfrak{k}^2}\right)$ Glieder mit dem grössten quadratischen Divisor $\mathfrak{k}^2$.

---

*) Je vier associirte Zahlen $a + bi$ repräsentiren dasselbe Ideal.

**) Ueber den Werth dieser unendlichen Reihe vergl. S. 176.

***) l. c., S. 327–328.

Also ist, da eben jedes Ideal eindeutig als Product eines Idealquadrates und eines quadratfreien Ideals darstellbar ist,

$$\tau(x) = \sum_{Nt \leqq \sqrt{x}} \Psi\left(\frac{x}{Nt^2}\right).$$

Daraus folgt durch Umkehrung mittelst der verallgemeinerten *Möbius*schen Coefficienten

$$\Psi(x) = \sum_{Nm \leqq \sqrt{x}} \mu(m)\, \tau\left(\frac{x}{Nm^2}\right),$$

also bei Anwendung von

$$\tau(x) = Ax\log x + Bx + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

wo A, B die in (128.) gefundenen Werthe haben,

$$\Psi(x) =$$

$$\sum_{Nm \leqq \sqrt{x}} \mu(m)\left(A\frac{x}{Nm^2}\log x - 2A\frac{x}{Nm^2}\log Nm + B\frac{x}{Nm^2} + x^{1-\frac{1}{2k}}O\left(\frac{1}{Nm^{2-\frac{1}{k}}}\right)\right)$$

$$(131.)\quad \begin{cases} = (Ax\log x + Bx)\sum\limits_{Nm \leqq \sqrt{x}} \dfrac{\mu(m)}{Nm^2} - 2Ax\sum\limits_{Nm \leqq \sqrt{x}} \dfrac{\mu(m)\log Nm}{Nm^2} \\ \qquad + x^{1-\frac{1}{2k}}O\sum\limits_{Nm \leqq \sqrt{x}} \dfrac{1}{Nm^{2-\frac{1}{k}}}. \end{cases}$$

Für $k \geqq 2$ convergiren die drei ins Unendliche ausgedehnten Summen auf der rechten Seite, und zwar ist

$$(132.)\quad \sum_{Nm \leqq \sqrt{x}} \frac{\mu(m)}{Nm^2} = \sum_{Nm=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{Nm^2} + O\int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\zeta_\kappa(2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

$$(133.)\quad \sum_{Nm \leqq \sqrt{x}} \frac{\mu(m)\log Nm}{Nm^2} = \sum_{Nm=1}^{\infty} \frac{\mu(m)\log Nm}{Nm^2} + O\int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{\log u\, du}{u^2}$$

$$= -\lim_{s=2} \frac{d}{ds}\sum_{Nm=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{Nm^s} + O\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= -\lim_{s=2} \frac{d}{ds}\frac{1}{\zeta_\kappa(s)} + O\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\zeta_\kappa'(2)}{\zeta_\kappa^2(2)} + O\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right);$$

(132.) und (133.) ergeben, in (131.) eingesetzt,

$$\Psi(x) =$$

$$(\alpha^2 x\log x + (2\alpha\beta - \alpha^2)x)\left(\frac{1}{\zeta_\kappa(2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - 2\alpha^2 x\left(\frac{\zeta_\kappa'(2)}{\zeta_\kappa^2(2)} + O\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)\right)$$

$$+ O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

also, da für $k \geqq 2$ $O(\sqrt{x}\log x)$ gegen $O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right)$ vernachlässigt werden kann,

$$\Psi(x) = \frac{\alpha^2}{\zeta_\varkappa(2)}x\log x + \frac{(2\alpha\beta-\alpha^2)\zeta_\varkappa(2) - 2\alpha^2\zeta_\varkappa'(2)}{\zeta_\varkappa^2(2)}x + O\left(x^{1-\frac{1}{2k}}\right),$$

was für $\varkappa = P(i)$ die *Mertens*sche*) Form annimmt.

4) Der asymptotische Werth der Summe $\sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{n})}$ könnte nach der Methode berechnet werden, die ich**) für die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ angegeben habe, und die sich auf folgende Identität***) stützt:

$$\frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{n}\sum_l \frac{1}{\varphi(l)},$$

wo l alle quadratfreien Theiler von n durchläuft. Allgemein ist

$$\frac{1}{\varphi(\mathfrak{n})} = \frac{1}{N\mathfrak{n}}\sum_{\mathfrak{l}} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{l})},$$

wo $\mathfrak{l}$ die quadratfreien in $\mathfrak{n}$ aufgehenden Ideale durchläuft. Man würde analog erkennen, dass es zwei Constanten L und M giebt, so dass

$$(134.)\qquad \Omega(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{n})} = L\log x + M + O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{k}}}\right) + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

ist, wo für $k \geqq 2$ das letzte Glied gegen das vorletzte vernachlässigt werden kann, und man würde so auch zur Bestimmung der Constanten L und M gelangen. Nachdem ihre Existenz feststeht, kann man übrigens zu ihrer Bestimmung folgenden transcendenteren, aber kürzeren Weg einschlagen. Es ist nach (134.) für zwei noch unbekannte Constanten L, M, $k \geqq 2$ angenommen†),

---

*) l. c., S. 330.

**) „Ueber die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum *Goldbach*schen Satz", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1900, S. 181—184.

***) l. c., S. 182.

†) Für $k = 1$ lautet die Abschätzung etwas anders und führt zu der a. a. O. (S. 184) von mir aufgestellten Formel, die sich von der hier entwickelten nur dadurch unterscheidet, dass der Rest die Grössenordnung $O\left(\frac{\log x}{x}\right)$ statt $O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{k}}}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ hat.

$$\sum_{N\mathfrak{n}\leqq x}\frac{N\mathfrak{n}}{\varphi(\mathfrak{n})}=\sum_{n=1}^{x} n\sum_{N\mathfrak{n}=n}\frac{1}{\varphi(\mathfrak{n})}=\sum_{n=1}^{x} n(\Omega(n)-\Omega(n-1))$$

$$=\sum_{n=1}^{x} n\big(L\log n+M-L\log(n-1)-M\big)+\sum_{n=1}^{x} O\Big(\frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}\Big)(n-(n+1))+O\Big(\frac{1}{x^{\frac{1}{k}}}\Big)(x+1)$$

$$=L\sum_{n=1}^{x} n\Big(\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)+O\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}+O\Big(x^{1-\frac{1}{k}}\Big)$$

$$=Lx+O\Big(x^{1-\frac{1}{k}}\Big);$$

die Sätze auf S. 77—80 sind also anwendbar und liefern: L und M sind die Coefficienten von $(s-1)^{-1}$ und $(s-1)^{0}$ in der Entwickelung der Function

$$\omega(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sum\limits_{N\mathfrak{n}=n}\frac{1}{\varphi(\mathfrak{n})}}{n^s}=\sum_{N\mathfrak{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(\mathfrak{n})N\mathfrak{n}^{s-1}}=\frac{L}{s-1}+M+M_1(s-1)+M_2(s-1)^2+\cdots.$$

Nun ist aber für theilerfremde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$

$$\varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,N(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{s-1}=\varphi(\mathfrak{a})\,N\mathfrak{a}^{s-1}\cdot\varphi(\mathfrak{b})\,N\mathfrak{b}^{s-1},$$

also

$$\omega(s)=\prod_{\mathfrak{p}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\varphi(\mathfrak{p}^\nu)N(\mathfrak{p}^\nu)^{s-1}}=\prod_{\mathfrak{p}}\Bigg(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{N\mathfrak{p}^\nu\Big(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\Big)N(\mathfrak{p}^\nu)^{s-1}}\Bigg)$$

$$=\prod_{\mathfrak{p}}\Bigg(1+\frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(N\mathfrak{p}^s)^\nu}\Bigg)=\prod_{\mathfrak{p}}\Bigg(1+\frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}}\,\frac{\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}\Bigg),$$

$$\frac{\omega(s)}{\zeta_x(s)}=\omega(s)\prod_{\mathfrak{p}}\Big(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\Big)=\prod_{\mathfrak{p}}\Bigg(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}+\frac{1}{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}}\,\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\Bigg)$$

$$=\prod_{\mathfrak{p}}\Big(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}+\frac{1}{N\mathfrak{p}^{s-1}(N\mathfrak{p}-1)}\Big).$$

Dies wird für $s=1$ gleich

$$\prod_{\mathfrak{p}}\Big(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}+\frac{1}{N\mathfrak{p}-1}\Big)=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{N\mathfrak{p}^2-N\mathfrak{p}+1}{N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p}-1)}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{N\mathfrak{p}^3+1}{(N\mathfrak{p}+1)N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p}-1)}$$

$$=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{N\mathfrak{p}^6-1}{(N\mathfrak{p}^3-1)(N\mathfrak{p}^2-1)N\mathfrak{p}}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^6}}{\Big(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^3}\Big)}=\frac{\zeta_x(2)\zeta_x(3)}{\zeta_x(6)},$$

$$\frac{\omega}{\zeta_x}(1)=\frac{\zeta_x(2)\zeta_x(3)}{\zeta_x(6)}.$$

Ferner ist

$$\frac{d\left(\frac{\omega(s)}{\zeta_x(s)}\right)}{ds} = \prod_{\mathfrak{p}}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{s-1}(N\mathfrak{p}-1)}\right)\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^s} - \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{s-1}(N\mathfrak{p}-1)}}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{s-1}(N\mathfrak{p}-1)}},$$

also für $s = 1$

$$\left(\frac{\omega}{\zeta_x}\right)'(1) = \frac{\zeta_x(2)\zeta_x(3)}{\zeta_x(6)} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} - \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-1}}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}} + \frac{1}{N\mathfrak{p}-1}}$$

$$= -\frac{\zeta_x(2)\zeta(3)}{\zeta_x(6)} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2 - N\mathfrak{p} + 1}.$$

Hierdurch sind die Constanten L, M bestimmt, da

$$\frac{\omega(s)}{\zeta_x(s)} = \frac{\frac{L}{s-1} + M + M_1(s-1) + \cdots}{\frac{\alpha}{s-1} + \beta + \beta_1(s-1) + \cdots} = \frac{L + M(s-1) + \cdots}{\alpha + \beta(s-1) + \cdots}$$

$$= \frac{L}{\alpha} + \left(\frac{M}{\alpha} - \frac{L\beta}{\alpha^2}\right)(s-1) + \cdots,$$

ist, also

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{\omega}{\zeta_x}(1) = \frac{\zeta_x(2)\zeta_x(3)}{\zeta_x(6)},$$

$$\frac{M}{\alpha} - \frac{L\beta}{\alpha^2} = \left(\frac{\omega}{\zeta_x}\right)'(1) = -\frac{\zeta_x(2)\zeta_x(3)}{\zeta_x(6)} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2 - N\mathfrak{p} + 1},$$

d. h.

$$L = \alpha\frac{\zeta_x(2)\zeta_x(3)}{\zeta_x(6)},$$

$$M = \frac{\zeta_x(2)\zeta_x(3)}{\zeta_x(6)}\left(\beta - \alpha\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2 - N\mathfrak{p} + 1}\right),$$

$$\Omega(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{\varphi(\mathfrak{n})} = \frac{\zeta_x(2)\zeta_x(3)}{\zeta_x(6)}\left(\alpha\log x + \beta - \alpha\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^2 - N\mathfrak{p} + 1}\right) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{k}}}\right).$$

Sechster Abschnitt.

Ueber die *Kronecker*sche Grenzformel.

Ich kehre zu der auf S. 81 bewiesenen Formel

$$(20.) \qquad R(x) = \sum_{N\mathfrak{n} \leqq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = \alpha\log x + \beta + O\left(x^{-\frac{1}{k}}\right)$$

zurück und specialisire sie für einen beliebigen quadratischen Körper mit der Discriminante D. Die Constanten α und β ergeben sich aus*)

$$\zeta_x(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m^s}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m^s}\cdot\zeta(s).$$

In der Umgebung von $s=1$ ist wegen

$$\frac{d}{ds}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m^s} = -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\log m}{m^s}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\log m}{m}\cdot(s-1) + g_2(s-1)^2 + \cdots^{**});$$

ferner ist

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \cdots,$$

also

$$\zeta_x(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \beta + \beta_1(s-1) + \cdots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{s-1} + \left(C\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\log m}{m}\right) + \beta_1(s-1) + \cdots,$$

d. h., wenn die Abkürzungen S_1 und S_2 für die beiden auf der rechten Seite vorkommenden Summen eingeführt werden:

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} = S_1^{***)},$$

$$\beta = C\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\log m}{m} = CS_1 - S_2.$$

Daher ist für den quadratischen Körper

$$(135.)\quad \sum_{N\mathfrak{n}\leq x}\frac{1}{N\mathfrak{n}} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\cdot\log x + \left(C\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\log m}{m}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

---

*) Vergl. S. 99, Gleichung (46.).

**) Die schon von Herrn *Mertens* (l. c., S. 294) betrachtete Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\log m}{m}$ convergirt wegen $\sum_{m=1}^{x}\left(\frac{D}{m}\right) = O(1)$ nach dem auf S. 126 citirten Convergenzkriterium; aus demselben Grunde convergirt die *Dirichlet*sche Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m^s}$ für alle $s > 0$ (also für $\Re(s) > 0$) und kann daher gliedweise differentiirt werden.

***) Der Werth dieser bei der Bestimmung der Klassenzahl der binären quadratischen Formen bezw. der Ideale eines quadratischen Körpers auftretenden unendlichen Reihe kann bekanntlich in endlicher Form dargestellt werden; vergl. S. 133 und 137.

Diese Gleichung (135.) will ich auch direct, ohne Benutzung *Dirichlet*scher Reihen herleiten, auf analogem Wege, wie Herr *Mertens**) es für den speciellen Körper $P(i)$ gethan hat, aber noch mit einer Vereinfachung. Es ist

$$\sum_{N\mathfrak{n}\leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{n}} = \sum_{n=1}^{x}\frac{F(n)}{n} = \sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}\sum_{m}\left(\frac{D}{m}\right)^{**)} = \sum_{mk\leqq x}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{mk}.$$

Alle Paare ganzer Zahlen m, k, für welche $mk\leqq x$, sind so beschaffen, dass entweder $m\leqq\sqrt{x}$ oder $k\leqq\sqrt{x}$ oder beides der Fall ist; berücksichtigt man erst alle Paare, für welche $m\leqq\sqrt{x}$, dann alle Paare, für welche $k\leqq\sqrt{x}$, und bringt schliesslich alle Paare in Abzug, für welche $m\leqq\sqrt{x}$ und $k\leqq\sqrt{x}$, so ergiebt sich

$$\sum_{N\mathfrak{n}\leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{n}} = \sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\frac{x}{m}}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{\frac{x}{k}}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}-\sum_{k=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{k}\cdot\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}.$$

Nun ist für ganze oder gebrochene y

$$\sum_{k=1}^{y}\frac{1}{k} = \log y + C + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

und

$$\sum_{m=1}^{y}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}+O\left(\frac{1}{y}\right) = S_1+O\left(\frac{1}{y}\right),$$

also

$$\sum_{N\mathfrak{n}\leqq x}\frac{1}{N\mathfrak{n}} = \sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\left(\log x-\log m+C+O\left(\frac{m}{x}\right)\right)+\sum_{k=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{k}\left(S_1+O\left(\frac{k}{x}\right)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}\log x+C+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}$$

$$=\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\frac{1}{2}\log x-\log m}{m}+\frac{1}{x}O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+S_1\left(\frac{1}{2}\log x+C+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{x}O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}O(1)$$

$$(136.)\qquad =\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\frac{1}{2}\log x-\log m}{m}+\frac{1}{2}S_1\log x+CS_1+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

---

*) l. c., S. 326—328.

**) m durchläuft alle Theiler von n.

Da für $\sqrt{x} < m < e\sqrt{x}$ die Function $\frac{\log m - \frac{1}{2}\log x}{m}$ bis zum Maximum $\frac{1}{e\sqrt{x}}$ wächst, dann aber mit wachsendem m abnimmt, ist

$$\sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{\frac{1}{2}\log x - \log m}{m} = \sum_{m=1}^{x} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{\frac{1}{2}\log x - \log m}{m} + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} S_1 \log x - S_2 + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right),$$

also

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = S_1 \log x + (CS_1 - S_2) + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right),$$

was mit der zu beweisenden Gleichung (135.) identisch ist. Da wegen $[x] = S_1 x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ von vornherein feststeht, dass der Fehler im Resultate $\alpha \log x + \beta$ höchstens die Ordnung $x^{-\frac{1}{2}}$ hat, genügt es übrigens, mit Benutzung von

$$\sum_{m=1}^{y} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{\log m}{m} = S_2 + O\left(\frac{\log y}{y}\right)$$

aus (136.) so weiterzuschliessen:

$$\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}} = \frac{1}{2} \log x \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{\log m}{m} + \frac{1}{2} S_1 \log x + CS_1 + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log x \left(S_1 + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\right) - S_2 + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \log x\right) + \frac{1}{2} S_1 \log x + CS_1 + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= S_1 \log x + (CS_1 - S_2) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \log x\right),$$

wo eben nachträglich $O\left(x^{-\frac{1}{2}} \log x\right)$ durch $O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$ ersetzt werden darf, da die Form $\alpha \log x + \beta + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$ des Resultates feststeht.

Ich nehme nunmehr $D < 0$ an. Wenn man die Summe $\sum_{N\mathfrak{n} \leq x} \frac{1}{N\mathfrak{n}}$ nicht auf alle Ideale, sondern nur auf alle Ideale einer Idealklasse bezieht, so ist diese Summe gleich der Hälfte (nur für $D = -3$ gleich dem Sechstel und für $D = -4$ gleich dem Viertel) der Summe

$$\sum_{q \leq x}' \frac{1}{au^2 + buv + cv^2}, \tag{137.}$$

wo die quadratische Form $q = au^2 + buv + cv^2$ ein beliebiger Repräsentant der wohlbestimmten der Idealklasse entsprechenden Klasse definiter positiver quadratischer Formen der Discriminante D ist*). Das Zeichen Σ' bedeutet, dass das Werthepaar $u = 0$, $v = 0$ auszuschliessen ist; u, v haben alle übrigen ganzzahligen Werthepaare im Innern und auf dem Rande der Ellipse $au^2 + buv + cv^2 = x$ zu durchlaufen. Die Summe $\sum\limits_{Nn \leqq x} \frac{1}{Nn}$ zerfällt also, wenn h die Klassenzahl ist, in h Partialsummen vom Typus (137.). Man kann, auch ohne in ein näheres Studium derselben einzutreten, von vornherein einsehen, dass jede dieser Theilsummen (137.) die Form

$$A \log x + B + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

hat, auch für beliebige (nicht nothwendig ganzzahlige) reelle a, b, c, falls $b^2 - 4ac < 0$ und $a > 0$ ist.

Es bezeichne nämlich $f(n)$ die Anzahl der Lösungen von

$$n - 1 < au^2 + buv + cv^2 \leqq n \qquad (u,\ v \text{ ganz})^{**});$$

dann ist in

$$\sum_{q \leqq x}' \frac{1}{q} = \sum_{q \leqq x}' \frac{1}{au^2 + buv + cv^2} = \sum_{n=1}^{x} \sum_{n-1 < q \leqq n} \frac{1}{q}$$

die innere Summe, welche aus $f(n)$ zwischen $\frac{1}{n-1}$ und $\frac{1}{n}$ gelegenen Gliedern besteht, zwischen $\frac{f(n)}{n-1}$ und $\frac{f(n)}{n}$ gelegen, also von der Form

$$\frac{f(n)}{n - \vartheta_n} \qquad (0 \leqq \vartheta_n < 1).$$

Also

$$(138.) \qquad \sum_{q \leqq x}' \frac{1}{au^2 + buv + cv^2} = \sum_{n=1}^{x} \frac{f(n)}{n - \vartheta_n}.$$

Nun ist aber

$$H(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n)$$

gleich der um 1 verminderten Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf

*) Vergl. *Dedekind*, S. 639; die Bezeichnungsweise der quadratischen Formen ist in *Kronecker*schem Sinne geändert; $D = -\Delta$ bedeutet $b^2 - 4ac$.

**) Für ganzzahlige a, b, c ist also $f(n)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahl n durch die Form $q = au^2 + buv + cv^2$; x kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit beim Beweise jedenfalls ganz angenommen werden.

dem Rande der Ellipse $au^2+buv+cv^2=x$, also mit dem Fehler $O(\sqrt{x})$ gleich x mal dem Inhalte $A=\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$ der Ellipse:

$$H(x)=\sum_{n=1}^{x}f(n)=Ax+\gamma_x \qquad (\gamma_x=O(\sqrt{x})).$$

Folglich ergiebt sich aus (138.)

$$\sum_{q\leq x}'\frac{1}{au^2+buv+cv^2}=\sum_{n=1}^{x}\frac{H(n)-H(n-1)}{n-\vartheta_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{x}\frac{A}{n-\vartheta_n}+\sum_{n=1}^{x}\gamma_n\left(\frac{1}{n-\vartheta_n}-\frac{1}{n+1-\vartheta_{n+1}}\right)+\frac{\gamma_x}{x+1-\vartheta_{x+1}}.$$

Hierin ist

$$\frac{1}{n-\vartheta_n}-\frac{1}{n+1-\vartheta_{n+1}}=\frac{1-\vartheta_{n+1}+\vartheta_n}{(n-\vartheta_n)(n+1-\vartheta_{n+1})}=O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

also convergirt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\left(\frac{1}{n-\vartheta_n}-\frac{1}{n+1-\vartheta_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

und hat vom x-ten Gliede an einen Rest $O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$:

$$\sum_{q\leq x}'\frac{1}{au^2+buv+cv^2}=A\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n-\vartheta_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\left(\frac{1}{n-\vartheta_n}-\frac{1}{n+1-\vartheta_{n+1}}\right)+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=A\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}+A\sum_{n=1}^{x}\frac{\vartheta_n}{n(n-\vartheta_n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\left(\frac{1}{n-\vartheta_n}-\frac{1}{n+1-\vartheta_{n+1}}\right)+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Hierin ist

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}=\log x+C+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

und

$$\sum_{n=1}^{x}\frac{\vartheta_n}{n(n-\vartheta_n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\vartheta_n}{n(n-\vartheta_n)}+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

also, wenn

$$(139.)\quad AC+A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\vartheta_n}{n(n-\vartheta_n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\left(\frac{1}{n-\vartheta_n}-\frac{1}{n+1-\vartheta_{n+1}}\right)=B$$

gesetzt wird,

$$(140.)\qquad \sum_{q\leq x}'\frac{1}{au^2+buv+cv^2}=A\log x+B+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right),$$

dass der limes (142.) nur von der Discriminante der quadratischen Form abhängt, nämlich $=\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$ ist.

2. Der Nachweis der Existenz von

$$\lim_{s=1}\Big(\sum_{u,v}{}'\frac{1}{(au^2+buv+cv^2)^s}-\frac{A}{s-1}\Big)=B$$

ist zuerst von Herrn *Weber**) geführt worden.

3. Der Werth der Constanten B ist von *Kronecker***) in geschlossener Form durch Thetafunctionen einer Variabeln ausgedrückt worden, wobei die Variable den Werth 0 erhält und der Parameter algebraisch von a, b, c abhängt. Andere Beweise dieser sogenannten *Kronecker*schen Grenzformel

$$B=\lim_{s=1}\Big(\sum_{u,v}{}'\frac{1}{(au^2+buv+cv^2)^s}-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\frac{1}{s-1}\Big)$$

$$(143.)\qquad =\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}}C+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{a}{\Delta}+\frac{8\pi}{3\sqrt{\Delta}}\log(2\pi)-\frac{4\pi}{3\sqrt{\Delta}}\log\big(\vartheta_1'(0\,|\,\alpha)\vartheta_1'(0\,|\,\beta)\big)^{***}),$$

wo

$$\alpha=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a},\qquad \beta=\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2a},$$

rühren von den Herren *Weber*†), *Lerch*††) und *Franel*†††) her; die in diesem Abschnitt bisher angestellten Betrachtungen dienen zur Vorbereitung auf eine vereinfachte Beweisanordnung.

---

*) „Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist", Mathematische Annalen, Bd. 20, 1882, S. 321 ff.

**) „Zur Theorie der elliptischen Functionen", Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1885, S. 775; 1889, S. 135. Eine ausführliche Darstellung der *Kronecker*schen Untersuchungen findet sich in der auf S. 131, Anm. 1 citirten Arbeit des Herrn *de Séguier*.

***) Ich wähle die von *Weierstrass* angewandte Bezeichnungsweise der Thetafunctionen; vergl. *Schwarz*, „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen", 2. Aufl., Berlin, 1893, S. 41—42.

†) „Zur complexen Multiplication elliptischer Functionen", Mathematische Annalen, Bd. 33, 1889, S. 392—395; „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen", Braunschweig, 1891, S. 456—462.

††) Vergl. die zweite der in Anm. 3 zu S. 68 citirten Arbeiten und „Sur un théorème de *Kronecker*", Bulletin de la société royale des sciences de Bohême, 2. Kl., 1893, No. 9, S. 1—17.

†††) „Sur une formule fondamentale de *Kronecker*", Mathematische Annalen, Bd. 48, 1897, S. 595—602.

4. Die Formel (140.), d. h. der Nachweis der Existenz zweier Constanten A, B, für welche (140.) gilt, findet sich bei Herrn *Mertens**), der auch die Constanten A und B bestimmt hat und genau die von *Dirichlet* bezw. *Kronecker* in (141.) ermittelten Werthe $A = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}$, B gleich dem Ausdruck (143.) gefunden hat.

5. Ein directer, von der näheren Bestimmung von A und B unabhängiger Nachweis, dass in (140.) und (141.) die Constanten A, B dieselbe Bedeutung haben, findet sich bei Herrn *Franel.***)

Nach dem Vorangehenden hängt also der Nachweis der *Kronecker*schen Grenzformel für reelle, nicht nothwendig ganzzahlige a, b, c (wo $b^2 - 4ac < 0$, $a > 0$) allein von der Berechnung der Constanten A, B in (140.) ab, d. h. von der asymptotischen Abschätzung der Summe

$$\sum_{q \leqq x}' \frac{1}{au^2 + buv + cv^2}.$$

Zur Berechnung einer solchen Doppelsumme ist zunächst nach der einen Variablen zwischen Grenzen zu summiren, die von der anderen Variablen abhängen; dann ist nach der anderen Variablen zwischen constanten Grenzen zu summiren. Die Schwierigkeit liegt in der Abschätzung der von der anderen Variablen abhängigen inneren Summe; in der Methode dieser Abschätzung***) liegt der Unterschied des nachfolgenden Beweises von dem *Mertens*schen, mit dem er im Anfang übereinstimmt.

Wegen

$$aq = a^2u^2 + abuv + acv^2 = \left(au + \frac{b}{2}v\right)^2 + \frac{\Delta}{4}v^2 \qquad (\Delta = -D = 4ac - b^2)$$

durchläuft v alle ganzzahligen Werthe von $-\left[2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right]$ bis $+\left[2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right]$, u alle zwischen

$$u_1 = \frac{-bv - \sqrt{4ax - \Delta v^2}}{2a} \text{ und } u_2 = \frac{-bv + \sqrt{4ax - \Delta v^2}}{2a}$$

mit Einschluss der Grenzen gelegenen ganzzahligen Werthe; nur das Werthe-

---

*) „Ueber einen asymptotischen Ausdruck", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien, Abth. 2ª, Bd. 106, 1897, S. 411—421.

**) „Sur la théorie des séries", Mathematische Annalen, Bd. 52, 1899, S. 533—536.

***) Vergl. S. 171 ff.

paar $u = 0$, $v = 0$ ist auszuschliessen. Also ist, wenn man zuerst $v = 0$ nimmt, dann $v > 0$ und $v < 0$:

$$\sum_{q\leq x}' \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = 2\sum_{u=1}^{\sqrt{\frac{x}{a}}} \frac{1}{au^2} + \sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}} \sum_{u=u_1}^{u_2} \frac{1}{au^2+buv+cv^2}$$
$$+ \sum_{v=-2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}^{-1} \sum_{u=u_1}^{u_2} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} \text{*)};$$

die beiden letzten Summen stimmen überein, da die Form q sich bei der Substitution $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ nicht ändert und hierbei zugleich u_1 in $-u_2$, u_2 in $-u_1$ übergeht. Also ist wegen

$$\sum_{u=1}^{y} \frac{1}{u^2} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u^2} + O\int_y^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$(144.)\quad \sum_{q\leq x}' \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = \frac{2}{a}\left(\frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + 2\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}} \sum_{u=u_1}^{u_2} \frac{1}{au^2+buv+cv^2}.$$

Nun ist für $v > 0$

$$(145.)\quad \sum_{u=u_1}^{u_2} \frac{1}{au^2+buv+cv^2}$$
$$= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} - \sum_{u=-\infty}^{u_1 \text{ excl.}} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} - \sum_{u=u_2 \text{ excl.}}^{\infty} \frac{1}{au^2+buv+cv^2}.$$

Hierin ist, falls

$$\alpha = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \beta = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

gesetzt wird,

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{i}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{\alpha v-u} + \frac{1}{\beta v+u}\right)$$
$$= \frac{i}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{1}{\alpha v} + \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha v-u} + \frac{1}{\alpha v+u}\right) + \frac{1}{\beta v} + \sum_{u=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta v-u} + \frac{1}{\beta v+u}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{i}{\alpha v} + \sum_{u=1}^{\infty} \frac{-2i\alpha v}{(-i\alpha v)^2+u^2} + \frac{i}{\beta v} + \sum_{u=1}^{\infty} \frac{-2i\beta v}{(-i\beta v)^2+u^2}\right)$$
$$= \frac{1}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{2\pi}{e^{-2\pi i\alpha v}-1} + \pi + \frac{2\pi}{e^{-2\pi i\beta v}-1} + \pi\right),$$

*) Bei dieser Schreibweise hat der Summationsbuchstabe alle zwischen den (nicht nothwendig ganzzahligen) Summationsgrenzen gelegenen ganzen Zahlen zu durchlaufen. Wenn nichts anderes bemerkt wird, sind die Summationsgrenzen, falls eventuell ganz, in das Intervall einzubeziehen.

(146.) $$\sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = \frac{2\pi}{v\sqrt{\Delta}} + \frac{2\pi}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}} + \frac{e^{2\pi i\beta v}}{1-e^{2\pi i\beta v}}\right).$$

Wenn nun eine Function $f(u)$ für $u \geqq m$ mit wachsendem u abnimmt, derart, dass $\int_m^\infty f(u)\,du$ einen Sinn hat, so ist bekanntlich für ganzzahlige (nicht nothwendig positive) m, wie die geometrische Anschauung lehrt und wie analytisch leicht bewiesen werden kann,

$$\sum_{u=m}^{\infty} f(u) = \int_m^\infty f(u)\,du + \vartheta f(m) \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

In der Summe

$$\sum_{u=u_2 \text{ excl.}}^{\infty} \frac{1}{au^2+buv+cv^2}$$

nimmt der Summand thatsächlich mit wachsendem u ab, da für $u > u_2$

$$\frac{\partial}{\partial u}(au^2+buv+cv^2) = 2au + bv > 2au_2 + bv$$
$$= -bv + \sqrt{4ax - \Delta v^2} + bv = \sqrt{4ax - \Delta v^2} \geqq 0\text{*})$$

ist; also ist die Summe

$$= \sum_{u=[u_2]+1}^{\infty} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = \int_{[u_2]+1}^{\infty} \frac{du}{au^2+buv+cv^2} + \frac{\vartheta}{a([u_2]+1)^2+b([u_2]+1)v+cv^2},$$

also wegen $[u_2]+1 > u_2$ und

$$\int_{u_2}^{[u_2]+1} \frac{du}{au^2+buv+cv^2} = \frac{\vartheta_1}{au_2^2+bu_2v+cv^2} \qquad (0 \leqq \vartheta_1 \leqq 1):$$

(147.) $$\sum_{u=u_2 \text{ excl.}}^{\infty} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = \int_{u_2}^{\infty} \frac{du}{au^2+buv+cv^2} + \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{au_2^2+bu_2v+cv^2} \qquad (0 \leqq \vartheta_2 \leqq 1).$$

Nun ist

$$\int \frac{du}{au^2+buv+cv^2} = \int \frac{d\left(au+\frac{b}{2}v\right)}{\left(au+\frac{b}{2}v\right)^2+\frac{\Delta}{4}v^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}v\sqrt{\Delta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{au+\frac{b}{2}v}{\frac{1}{2}v\sqrt{\Delta}} + \text{const.},$$

---

*) u_1 und u_2 sind eben die Nullstellen der quadratischen Function
$$au^2+buv+cv^2-x,$$
welche daher für $u_2 < u$ mit wachsendem u wächst und für $u < u_1$ mit abnehmendem u wächst.

$$\int_{u_2}^{x} \frac{du}{au^2+buv+cv^2} = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{4ax}{\Delta v^2}-1}\right) = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin\left(\frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{ax}}\right).^{*)}$$

Daraus folgt, da in (147.) der letzte Nenner gleich x ist,

$$(148.) \qquad \sum_{u=u_2 \text{ excl.}}^{\infty} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin\left(\frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{ax}}\right) + \frac{\Theta_1}{x} \qquad (-1 \leqq \Theta_1 \leqq 1).$$

Ebenso ist, da für

$$u < u_1 = \frac{-bv - \sqrt{4ax - \Delta v^2}}{2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(au^2+buv+cv^2) = 2au+bv < 2au_1+bv = -\sqrt{4ax-\Delta v^2} \leqq 0^{**)}$$

ist,

$$(149.) \qquad \sum_{u=-\infty}^{u_1 \text{ excl.}} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin\left(\frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{ax}}\right) + \frac{\Theta_2}{x} \qquad (-1 \leqq \Theta_2 \leqq 1).$$

Setzt man (146.), (148.) und (149.) in (145.) ein, so ergiebt sich

$$(150.) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{u=u_1}^{u_2} \frac{1}{au^2+buv+cv^2} = \frac{2\pi}{v\sqrt{\Delta}} + \frac{2\pi}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}} + \frac{e^{2\pi i\beta v}}{1-e^{2\pi i\beta v}}\right) \\ \displaystyle\qquad - \frac{4}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin\left(\frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{ax}}\right) + \frac{2\Theta_3}{x} \qquad (-1 \leqq \Theta_3 \leqq 1). \end{cases}$$

Dies ist nach (144.) von $v = 1$ bis $v = \left[2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right]$ zu summiren. Es ist

$$(151.) \quad \begin{aligned} \sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}} \frac{1}{v} &= \log\left(2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right) + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log x + \log\left(2\sqrt{\frac{a}{\Delta}}\right) + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \end{aligned}$$

---

*) Der Quadratwurzel ist der positive Werth beizulegen, und es ist der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene Werth des arc sin zu wählen.

**) Vergl. Anm. 1 auf S. 171.

ferner

$$\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}} \frac{1}{v} \frac{e^{2\pi i a v}}{1-e^{2\pi i a v}} = \sum_{v=1}^{x} \frac{1}{v} \frac{e^{2\pi i a v}}{1-e^{2\pi i a v}} + O \sum_{v=2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}^{x} \frac{1}{v} \frac{\left| e^{2\pi i \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a} v}\right|}{1-\left| e^{2\pi i \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a} v}\right|}$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \sum_{m=1}^{x} e^{2m\pi i a v} + O \sum_{v=2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}^{x} \frac{1}{v} \frac{e^{-\frac{\pi}{a}\sqrt{\Delta}v}}{1-e^{-\frac{\pi}{a}\sqrt{\Delta}v}}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{x} \frac{e^{2m\pi i a v}}{v} + O \sum_{v=2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}^{x} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{a}\sqrt{\Delta}v}},$$

also, da der Rest sogar noch stärker 0 wird als $\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \log(1-e^{2m\pi i a}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= -\log \prod_{m=1}^{\infty} (1-e^{2m\pi i a}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$(152.) \qquad = \frac{1}{3}\log 2\pi + \frac{\pi i \alpha}{12} - \frac{1}{3}\log \vartheta_1'(0|\alpha) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Ebenso ist

$$(153.) \qquad \sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}} \frac{1}{v} \frac{e^{2\pi i \beta v}}{1-e^{2\pi i \beta v}} = \frac{1}{3}\log 2\pi + \frac{\pi i \beta}{12} - \frac{1}{3}\log \vartheta_1(0|\beta) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Was endlich den Ausdruck

$$\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}} \frac{1}{v} \arcsin\left(\frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{ax}}\right)$$

betrifft, so ergiebt sich sein Grenzwerth für $x=\infty$ aus der Definition des bestimmten Integrals; da die Form $A \log x + B + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$ des Schlussresultates von vornherein feststeht, ist die Differenz des Ausdrucks von jenem Grenzwerth gleich $O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$. Es ist für

$$\eta_v = \frac{v}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{a}} \qquad \left(v=1,2,\ldots\left[2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right]\right),$$

also

$$\eta_{\nu+1}-\eta_\nu=\frac{1}{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}$$

und

$$f(\eta)=\frac{\arc\sin\eta}{\eta}$$

$$\lim_{x=\infty}\sum_{\nu=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}\frac{1}{\nu}\arc\sin\left(\frac{\nu}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{ax}}\right)=\lim_{x=\infty}\frac{1}{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}\sum_{\nu=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}\frac{1}{\frac{\nu}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{a}}}\arc\sin\left(\frac{\nu}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right)$$

$$=\lim_{x=\infty}\sum_{\nu=1}^{2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}}(\eta_{\nu+1}-\eta_\nu)f(\eta_\nu)=\int_0^1 f(\eta)\,d\eta=\int_0^1\arc\sin\eta\,\frac{d\eta}{\eta}$$

$$(154.)\qquad=\frac{\pi\log 2}{2}.$$

Summirt man also die rechte Seite von (150.) unter Benutzung von (151.), (152.), (153.), (154.) und substituirt das Resultat in (144.), so ergiebt sich die *Mertens*sche Relation

$$(155.)\quad\begin{cases}\sum\limits_{q\leqq x}'\frac{1}{au^2+buv+cv^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log x+\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}}C+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{a}{\Delta}+\frac{8\pi}{3\sqrt{\Delta}}\log 2\pi\\ \qquad\qquad-\frac{4\pi}{3\sqrt{\Delta}}\log\left(\vartheta_1'(0|\alpha)\,\vartheta_1'(0|\beta)\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\end{cases}$$

und damit die *Kronecker*sche Grenzformel.

Analog lässt sich der Fall einer quadratischen Form $q=au^2+buv+cv^2$ mit complexen Coefficienten behandeln. Ich will nur bemerken, dass die Aufgabe der Abschätzung von $\Sigma'\frac{1}{q}$ erst dann eine bestimmte ist, wenn ein Summationsbereich angenommen wird, und dass z. B. folgende Annahmen sich als rathsam herausstellen: Der reelle Theil der quadratischen Form ist definit positiv, d. h.

$$(\Re b)^2-4\Re a\cdot\Re c<0,\ \Re a>0,$$

und der Summationsbereich ist das Innere der Ellipse

$$\Re a\cdot u^2+\Re b\cdot uv+\Re c\cdot v^2=x.$$

Die nähere Darlegung würde zu weit vom Gegenstande dieser Arbeit abseits führen.

Ich bleibe vielmehr bei dem Falle der reellen definiten positiven Form und nehme jetzt wieder ganzzahlige Coefficienten an. Summirt man

In dem Falle $D = -4$, d. h. für die bei der Untersuchung des Körpers $P(i)$ auftretende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}-\frac{\log 7}{7}+\cdots\text{*)}$$

kann der geschlossene Ausdruck auch ohne Benutzung der *Kronecker*schen Grenzformel oder der äquivalenten *Mertens*schen Formel hergeleitet werden; denn die sogenannte *Kummer*sche**) Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n\pi}\sin 2n\pi x = \log\Gamma(x)+\frac{1}{2}\log\frac{\sin \pi x}{\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)(C+\log 2\pi) \quad (0<x<1)$$

drückt, $x = \frac{1}{4}$ gesetzt, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{n}\right)\frac{\log n}{n}$ durch $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ aus***), und schon *Legendre*†) hat bemerkt, dass $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ mit dem vollständigen elliptischen Integral für den Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ zusammenhängt. Dieses Integral kann hier die Thetafunctionen ersetzen, indem aus $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ folgt: $k' = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $K = K'$, $\tau = \frac{K'i}{K} = i$, was wirklich bei der Wahl des Repräsentanten $q = u^2+v^2$, wo $\alpha = \beta = i$ wird, als Modul auftritt. Es ist hier

$$2K^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\pi}\,\vartheta_1'(0\,|\,i).$$

Berger††) und später unabhängig Herr *Lerch*†††) haben endeckt, dass sich die linke Seite von (157.) für jede (negative Fundamental-)Discriminante D durch die Logarithmen einer endlichen Anzahl von Gammafunctionen mit rationalem Argument und die Constanten C, π, $\log 2\pi$, sowie $\sqrt{\varDelta}$ rational ausdrücken lässt. Beide Autoren benutzen zum Beweise dieser

---

*) Vergl. S. 157.

**) „Beitrag zur Theorie der Function $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-v}v^{x-1}\,dv$“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 35, 1847, S. 4.

***) Vergl. *Malmstén*, „De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis“, ebenda, Bd. 38, 1849, S. 20.

†) „Exercices de calcul intégral“, Paris, 1811, Theil 2, Art. 18—19, S. 238—239.

††) „Sur une sommation de quelques séries“, Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis, Ser. 3, Bd. 12, 1883, S. 30.

†††) „Sur quelques formules relatives au nombre des classes“, Bulletin des sciences mathématiques, Ser. 2., Bd. 21, 1897, S. 302—303.

Thatsache die *Kummer*sche Reihe. Herr *de Séguier**) hat später auf diesem Wege die Darstellung durch Gammafunctionen wiedergefunden, wenn auch sein Resultat nicht ganz richtig ist**). Im Folgenden gebe ich einen anderen Beweis, um durch ihn die im dritten Abschnitt enthaltene Einführung divergenter *Dirichlet*scher Reihen zu illustriren.

Differentiirt man die Gleichung (97.) logarithmisch nach s, so erhält man (für negative Fundamentaldiscriminanten D und hinreichend kleine positive s)

$$(158.)\qquad -\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n^s}}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}} = -\frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)}+\log\frac{2\pi}{\Delta}-\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}+\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n^{1-s}}}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1-s}}}.$$

Für $s=0$ geht (falls $D<-4$) die rechte Seite in $C+\log\frac{2\pi}{\Delta}+\frac{\sqrt{\Delta}}{h\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n}$ über, der Nenner der linken Seite, wie auf S. 133 bemerkt, in h. Wenn also die aus dem Zähler entspringende divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\log n$ im Sinne des Satzes auf S. 128—129 summirt werden kann, so ergiebt sich aus (158.) der Werth von $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n}$. Setzt man $a_n=\left(\frac{D}{n}\right)\log n$, so erhält man (ähnlich wie auf S. 134ff. für positive D):

$$S_n=\sum_{m=1}^{n}a_m=\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{D}{m}\right)\log m=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{\Delta}\right]\Delta}\left(\frac{D}{m}\right)\log m+\sum_{\left[\frac{n}{\Delta}\right]\Delta}^{n}\left(\frac{D}{m}\right)\log m,$$

$$(159.)\qquad \sum_{n=1}^{x}S_n=\sum_{n=1}^{x}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{\Delta}\right]\Delta}\left(\frac{D}{m}\right)\log m+\sum_{n=1}^{x}\sum_{\left[\frac{n}{\Delta}\right]\Delta}^{n}\left(\frac{D}{m}\right)\log m.$$

Hier ist die zweite Doppelsumme

$$=\sum_{m=1}^{x}c_m\log m,$$

wo

$$c_m=\left(\frac{D}{m}\right)\left(\left[\frac{m}{\Delta}\right]\Delta-m+\Delta\right),$$
$$c_{m+\Delta}=\left(\frac{D}{m+\Delta}\right)\left(\left[\frac{m+\Delta}{\Delta}\right]\Delta-(m+\Delta)+\Delta\right)$$
$$=\left(\frac{D}{m}\right)\left(\left[\frac{m}{\Delta}\right]\Delta-m+\Delta\right)=c_m,$$

*) „Sur certaines sommes arithmétiques"; Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 5, Bd. 5, 1899, S. 55 und 77.

**) Auf S. 75, Z. 5. fehlt links der Factor $\frac{\pi}{2}$ u. s. w.

$$\sum_{m=1}^{\Delta} c_m = -\sum_{m=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{m}\right)m + \Delta\sum_{m=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{m}\right) = -\sum_{m=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{m}\right)m = \Delta h^{*)},$$

$$C_x = \sum_{m=1}^{x} c_m = \left[\frac{x}{\Delta}\right]\sum_{m=1}^{\Delta} c_m + \sum_{\left[\frac{x}{\Delta}\right]\Delta}^{x} c_m = \left[\frac{x}{\Delta}\right]\Delta h + O(1) = hx + O(1),$$

$$\sum_{m=1}^{x} c_m \log m = \sum_{m=1}^{x}(C_m - C_{m-1})\log m = \sum_{m=1}^{x-1} C_m(\log m - \log(m+1)) + C_x \log x$$

$$= -\sum_{m=1}^{x-1} hm \log\left(1+\frac{1}{m}\right) + O\sum_{m=1}^{x-1}\log\left(1+\frac{1}{m}\right) + hx\log x + O(\log x)$$

$$= -\sum_{m=1}^{x-1} hm\left(\frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) + O(\log x) + hx\log x + O(\log x)$$

$$= hx\log x - hx + O(\log x). \tag{160.}$$

Die innere Summe des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (159.) ist, wenn für den Augenblick $\left[\frac{n}{\Delta}\right] - 1 = y$ gesetzt wird,

$$= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{\Delta}\right]\Delta}\left(\frac{D}{m}\right)\log m = \sum_{\lambda=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\sum_{\nu=0}^{y}\log(\lambda+\nu\Delta)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\Big(y\log y + y(\log\Delta - 1) + \left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{\Delta}\right)\log y + \log\Delta + \log\sqrt{2\pi}$$

$$- \log\Gamma\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right) + \{1\}\Big)^{**)}$$

$$= \frac{\log y}{\Delta}\sum_{\lambda=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\lambda - \sum_{\lambda=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\log\Gamma\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right) + \{1\}$$

$$= -h\log y - \sum_{\lambda=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\log\Gamma\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right) + \{1\},$$

wo $\{1\}$ eine Function von y bezeichnet, die für $y=\infty$, also für $n=\infty$ unendlich klein wird. Also ist $S_x = O(\log x)$; wegen

$$\sum_{n=1}^{x}\{1\} = \{x\}$$

ergiebt sich ferner

$$\sum_{n=1}^{x}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{\Delta}\right]\Delta}\left(\frac{D}{m}\right)\log m = -h\sum_{n=1}^{x}\log\left(\left[\frac{n}{\Delta}\right]-1\right) - x\sum_{\lambda=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\log\Gamma\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right) + \{x\}$$

$$= -h\sum_{n=1}^{x}\left(\log n - \log\Delta + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - x\sum_{\lambda=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\log\Gamma\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right) + \{x\}$$

$$= -hx\log x + hx(1+\log\Delta) - x\sum_{\lambda=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\log\Gamma\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right) + \{x\}. \tag{161.}$$

---

*) Für $D > 0$ war $\sum_{m=1}^{D} c_m = 0$ (vergl. S. 135).

**) Vergl. S. 136, Z. 2—3.

Aus (159.), (160.), (161.) folgt schliesslich

$$\sum_{n=1}^{x} S_n = hx \log \varDelta - x \sum_{\lambda=1}^{\varDelta} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{\varDelta}\right) + \{x\},$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} S_n = h \log \varDelta - \sum_{\lambda=1}^{\varDelta} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{\varDelta}\right).$$

Die divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \log n$ hat also diesen limes zur „Summe", und (158.) ergiebt

$$-\frac{1}{h}\left(h \log \varDelta - \sum_{\lambda=1}^{\varDelta} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{\varDelta}\right)\right) = C + \log \frac{2\pi}{\varDelta} + \frac{\sqrt{\varDelta}}{h\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\log n}{n},$$

$$(162.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\log n}{n} = -\frac{h\pi(C + \log 2\pi)}{\sqrt{\varDelta}} + \frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}} \sum_{\lambda=1}^{\varDelta} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{\varDelta}\right),$$

den *Berger-Lerch*schen Satz.

Die Gleichsetzung der rechten Seite von (162.) mit der rechten Seite der *Kronecker*schen Gleichung (157.) führt zu der Identität

$$(163.) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\varDelta} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{\varDelta}\right) = h \log \varDelta - \frac{h}{3} \log 2\pi - \sum_{(a,b,c)} \log a + \frac{2}{3} \sum_{(a,b,c)} \log(\vartheta_1'(0|\alpha)\, \vartheta_1'(0|\beta)),$$

welche sich schon bei Herrn *Lerch**) findet; (163.) stellt eine Relation zwischen den $\varDelta - 1$ Zahlen $\Gamma\left(\frac{\lambda}{\varDelta}\right)$ $(0 < \lambda < \varDelta)$ dar, welche gestattet, die Anzahl $\frac{\varphi(\varDelta)}{2}$ der im *Legendre-Stern*schen Sinne**) unabhängigen unter ihnen zu verkleinern. Uebrigens leistet die für positive Fundamentaldiscriminanten gültige Identität

$$(164.) \qquad 2 \sum_{\lambda=1}^{D} \left(\frac{D}{\lambda}\right) \log \Gamma\left(\frac{\lambda}{D}\right) = h \log \varepsilon \text{***})$$

nicht dasselbe; denn wegen

$$\left(\frac{D}{\lambda}\right) = \left(\frac{D}{D-\lambda}\right) \dagger),$$

*) l. c., S. 303.

**) Vergl. *Stern*, „Beweis eines Satzes von *Legendre*", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 67, 1867, S. 114—129.

***) $\varepsilon = \frac{T + U\sqrt{D}}{2}$, wo T, U die Fundamentallösung der *Pell*schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$ ist.

†) Dies gilt bekanntlich für alle positiven D, welche $\equiv 0 \pmod 4$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ sind.

$$\log \Gamma\left(\frac{\lambda}{D}\right)+\log \Gamma\left(\frac{D-\lambda}{D}\right) = \log\left(\Gamma\left(\frac{\lambda}{D}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{D}\right)\right)$$

setzt sich (164.) aus $\frac{\varphi(D)}{2}$ Specialfällen der Fundamentalrelation

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

zusammen, sodass (164.) nicht die *Stern*sche Anzahl $\frac{\varphi(D)}{2}$ der „unabhängigen„ Zahlen $\Gamma\left(\frac{\lambda}{D}\right)$ $(0 < \lambda < D)$ verkleinert.

Für $D > 0$ hängt die Berechnung der Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n}$, wie ein Versuch der Uebertragung des für $D < 0$ gültigen Gedankenganges ergiebt, ausschliesslich von der Kenntniss der Function

$$(165.)\quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cos(2n\pi x)^{*)} = \Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}t^n \quad (t = e^{2\pi i x})$$

ab, indem (für Fundamentaldiscriminanten**) $D > 1$) nach der *Gauss*schen Summenformel

$$\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\varrho^{\lambda n}\frac{\log n}{n} \qquad \left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{D}}\right)$$

ist, also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n} = \frac{1}{\sqrt{D}}\sum_{\lambda=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}(\varrho^{\lambda})^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}}\sum_{\lambda=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\Re\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}(\varrho^{\lambda})^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}}\sum_{\lambda=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cos\frac{2n\pi\lambda}{D}.$$

Die analoge Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\sin(2n\pi x)$, die bei der *Berger-Lerch-de Séguier*schen Untersuchung für $D < 0$ vorkommt, hängt nach *Kummer* mit

*) Die Reihe convergirt für alle reellen, nicht ganzen x.

**) Die Summation der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n}$ für nichtquadratische positive und negative Discriminanten, welche keine Fundamentaldiscriminanten sind, lässt sich (vergl. *de Séguier*, l. c., S. 77) leicht auf den Fall der Fundamentaldiscriminante zurückführen.

der Γ-Function aufs engste zusammen. Aber über die Function $F(x)$ ist mir nichts bekannt ausser einigen Untersuchungen, die Herr *Lerch**) ohne Beziehung zu diesen Fragen über das Verhalten für kleine x angestellt hat. Ich will zeigen, dass sie mit der Gammafunction eine Eigenschaft gemeinsam hat, welche *Legendre***) für diese vermuthete und die ich***) für dieselbe bewiesen habe:

Nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ lässt sich eine endliche Anzahl von Intervallen angeben, deren Gesammtlänge $<\delta$ ist, derart, dass der Werth der Reihe $F(x)$ für jedes reelle nicht ganze Argument (oder, was wegen der Periodicität von $F(x)$ dasselbe ist, für jedes zwischen 0 und 1 gelegene Argument) mittelst einer endlichen Anzahl elementarer Operationen durch die Werthe ausdrückbar ist, welche $F(x)$ für eine endliche Anzahl passend gewählter Argumente annimmt, welche diesen Intervallen angehören.

In der That ist für $0<2x<1$ nach (165.)

$$\begin{aligned}
F\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cos(2n\pi x+n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}(-1)^n\cos(2n\pi x)\\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cos(2n\pi x)+2\sum_{n=2,4,6\ldots}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cos(2n\pi x)\\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cos(2n\pi x)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log(2m)}{2m}\cos(4m\pi x)\\
&= -F(x)+\log 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 4m\pi x}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m}\cos(4m\pi x)\\
&= -F(x)-\log 2\log(2\sin 2\pi x)+F(2x).
\end{aligned}$$

$F(2x)$ ist also durch $F(x)$ und $F\left(x+\frac{1}{2}\right)$ mit Hülfe elementarer Functionen ausdrückbar; a. a. O. habe ich allein auf Grund der Functionalgleichung

---

*) „Bemerkungen über trigonometrische Reihen mit positiven Coefficienten", Sitzungsberichte der Königlich Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 1898, No. 23, S. 9 ff.

**) l. c., Theil 2, Art. 61—62, S. 283—285; Theil 4, Art. 31—38, S. 26—32; vergl. auch „Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes", Bd. 2, Paris 1826, 2. Hälfte, Art. 52—54, S. 411—413 und art. 101—108, S. 446—451.

***) „Zur Theorie der Gammafunction", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 123, 1901, S. 276—283.

zwischen $\Gamma(2x)$, $\Gamma(x)$ und $\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$ das Intervall $(0 \ldots . 1)$ für die Gammafunction auf eine beliebig kleine Länge δ verkleinert; also gilt der oben ausgesprochene Satz auch für die Function $F(x)$.

Siebenter Abschnitt.

Ueber die Abhängigkeit einiger auf die Vertheilung der Primzahlen bezüglichen Sätze von einander.

In diesem letzten Abschnitte wende ich mich zu dem Falle des natürlichen Rationalitätsbereiches, um die für das Problem der Primzahlvertheilung wichtige Frage zu erörtern, in welchem Umfange die Untersuchung der Stärke der Convergenz einer gewissen *Dirichlet*schen Reihe in einem gewissen Punkte für den Beweis des sogenannten Primzahlsatzes hinreicht.

Der Primzahlsatz*) heisst

$$\pi(x) \backsim Li(x),$$

wo $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$, $Li(x)$ den Integrallogarithmus von x bezeichnet; da $Li(x)$ asymptotisch gleich $\frac{x}{\log x}$ ist, kann dies auch

$$\pi(x) \backsim \frac{x}{\log x}$$

geschrieben werden. Die Reihe, um welche es sich handelt, ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$. Sie entsteht für $s=1$ formal aus der für $\Re(s)>1$ convergenten und dort mit $\frac{1}{\zeta(s)}$ übereinstimmenden *Dirichlet*schen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s}$. Wenn sie convergirt, ist also ihre Summe 0**).

Herr *von Mangoldt****) hat die Convergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$ zuerst nachgewiesen durch Anwendung der Theorie der ζ-Function; später führte

---

*) Er ist in der gleichwerthigen Form $\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \backsim x$ zuerst von den Herren *Hadamard* (l. c. — vergl. S. 69, Anm. 3 — S. 218) und *de la Vallée-Poussin* (l. c. — vergl. S. 69, Anm. 4 — S. 251) bewiesen worden; in der Form des Textes findet er sich zuerst bei Herrn *de la Vallée-Poussin* (l. c., S. 360—361) nachgewiesen; vergl. auch Herrn *von Mangoldts* Arbeit „Ueber eine Anwendung der *Riemann*schen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 119, 1898, S. 65—71.

**) Vergl. S. 119.

***) l. c. (vergl. S. 121, Anm. 1) S. 835—849.

ich*) den Nachweis auf anderem Wege**). Seine neueren Untersuchungen über die Vertheilung der Primzahlen gestatteten Herrn *de la Vallée-Poussin****), zu beweisen, dass

$$(166.)\qquad g(x)=\sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)}{k}=O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

ist; darauf zeigte ich****), dass noch genauer

$$(167.)\qquad g(x)=\sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)}{k}=O\left(\frac{1}{\log x\, e^{a\sqrt{\log\log x}}}\right)$$

ist, wo a eine positive Constante bezeichnet, und schloss†) daraus, dass

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{x}\mu(k)=O\left(\frac{x}{\log x\, e^{a\sqrt{\log\log x}}}\right)$$

ist.

Man kann nun umgekehrt die Frage aufwerfen, ob die Kenntniss der Sätze über die *Möbius*schen Coefficienten ausreichen würde, um aus ihnen den Primzahlsatz zu beweisen. Nur Herr *Mertens*††) hat sich mit dieser Frage beschäftigt. Aus seinen Untersuchungen geht hervor, dass, wenn man annimmt, es sei für alle $x>1$

$$(168.)\qquad |\sigma(x)|=\left|\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\right|<\sqrt{x},$$

der Primzahlsatz daraus folgt.

Die Ungleichung (168.) ist jedoch bis jetzt noch nicht bewiesen worden, also vielleicht für hinreichend grosse x nicht richtig. Ich will nunmehr feststellen, dass der von mir bewiesene Satz (167.) in der a fortiori gültigen Fassung

---

*) „Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k}=0$", Inauguraldissertation, Berlin, 1899.

**) Ich benutze a. a. O. als einziges transcendentes Hülfsmittel den (allerdings von der Theorie der ζ-Function nicht unabhängigen) Satz $\vartheta(x)\sim x$.

***) l. c. (vergl. S. 98, Anm. 1), S. 67.

****) „Ueber die asymptotischen Werthe einiger zahlentheoretischer Functionen", Mathematische Annalen, Bd. 54, 1901, S. 584.

†) l. c., S. 585.

††) „Ueber eine zahlentheoretische Function", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. 106, Abth. 2a, 1897, S. 761 ff.

$$(169.)\qquad g(x)=O\left(\frac{1}{\log x\,(\log\log x)^2}\right)^{*)}$$

gestattet, aus ihm allein den Primzahlsatz abzuleiten, so dass man bei etwaigen Versuchen, den Weg zum Beweise des Primzahlsatzes statt über die Theorie der ζ-Function über die Untersuchung der einen convergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k}$ zu nehmen, sicher ist, dass der Hülfssatz, den man beweisen will, und der für den Nachweis des Primzahlsatzes hinreicht, auch richtig ist.

Ich werde aus (169.)**) den dem Primzahlsatz äquivalenten ableiten, dass die *Tschebyschef*sche, durch die Gleichung

$$\psi(x)=\vartheta(x)+\vartheta(\sqrt{x})+\vartheta(\sqrt[3]{x})+\cdots=\sum_{p<x}\log p+\sum_{p^2<x}\log p+\sum_{p^3<x}\log p+\cdots$$
$$=\sum_{p\leqq x}\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p$$

erklärte Function $\sim x$ ist.

Aus *Tschebyschefs* Identität

$$T(x)=\log[x]!=\sum_{k=1}^{x}\psi\left(\frac{x}{k}\right)$$

*) Der Exponent 2 von $\log\log x$ könnte auch noch durch eine kleinere Zahl >1 ersetzt werden; das Wesentliche ist, wie sich nachher zeigen wird, dass für die unter dem Zeichen O stehende Function $G(x)$ das Integral $\int_a^{\infty}\frac{G(x)}{x}\,dx$ (für $a>e$) einen Sinn hat, was bei der in Herrn *de la Vallée-Poussins* Satz (166.) enthaltenen Function $G(x)=\frac{1}{\log x}$ noch nicht der Fall war.

**) Aus (169.) folgt übrigens die Convergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}|g(k)|\frac{1}{k}$, also wegen

$$\left|\frac{1}{k^{ti}}-\frac{1}{(k+1)^{ti}}\right|<\frac{t}{k}\quad(t>0)$$

die Convergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}g(k)\left(\frac{1}{k^{ti}}-\frac{1}{(k+1)^{ti}}\right)$, und daraus ergiebt sich für alle reellen t die Convergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{ti}}(g(k)-g(k-1))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^{1+ti}};$$

die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^s}$ convergirt also auch für $\Re(s)=1$, was bisher nur für den einen Werth $s=1$ bekannt war, und zwar ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^{1+ti}}=\frac{1}{\zeta(1+ti)}$.

folgt, wie Herr *Gram**) gezeigt hat,

$$(170.) \qquad -\psi(x) = \sum_{k=1}^{x} \mu(k) \left[\frac{x}{k}\right] \log k.$$

Aus (169.) folgen zunächst die nachher anzuwendenden Hülfssätze

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^{x} \mu(k) \log k = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} k \log k = \sum_{k=1}^{x} (g(k)-g(k-1))\, k \log k$$

$$= \sum_{k=1}^{x} g(k)\big(k \log k - (k+1)\log(k+1)\big) + g(x)(x+1)\log(x+1)$$

$$= O \sum_{k=3}^{x} \frac{1}{\log k (\log\log k)^2} \log k + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right) = O \int_3^x \frac{du}{(\log\log u)^2} + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right)$$

$$(171.) \qquad = O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right)$$

und

$$f(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)\log k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)\log k}{k} - \sum_{k=x+1}^{x} (g(k)-g(k-1)) \log k$$

$$= -1 - \sum_{k=x+1}^{x} g(k)(\log k - \log(k+1)) + g(x) \log(x+1)$$

$$= -1 + O \sum_{k=x}^{\infty} \frac{1}{\log k (\log\log k)^2} \cdot \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right)$$

$$= -1 + O \int_x^{\infty} \frac{du}{u \log u (\log\log u)^2} + O\left(\frac{1}{(\log\log x)^2}\right)$$

$$(172.) \qquad = -1 + O\left(\frac{1}{\log\log x}\right).$$

Uebrigens habe ich a. a. O.**) zunächst bewiesen, dass

$$(173.) \qquad f(x) = -1 + O\left(\frac{1}{e^{a\sqrt{\log\log x}}}\right)$$

---

*) l. c. (vergl. S. 118, Anm. 3) S. 238 und 299. (170.) folgt nicht etwa durch die gewöhnliche Umkehrung mittelst *Möbius*scher Coefficienten aus $T(x) = \sum_{k=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{k}\right)$; diese ergiebt $\psi(x) = \sum_{k=1}^{x} \mu(k)\, T\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{x} \mu(k) \log\left(\left[\frac{x}{k}\right]!\right)$.

**) l. c. (vergl. S. 183, Anm. 4), S. 584.

ist und daraus (167.) hergeleitet, nachdem ich analog aus

$$(174.)\qquad f(x) = -1 + \{1\}$$

hergeleitet hatte, dass

$$(175.)\qquad g(x) = \left\{\frac{1}{\log x}\right\}$$

ist. Den drei a. a. O. angegebenen Beweisanordnungen hierfür*) sei bei dieser Gelegenheit eine vierte, noch kürzere, hinzugefügt: Nach (174.) ist

$$f(x) = -1 + \eta(x),$$

wo

$$\lim_{x=\infty} \eta(x) = 0,$$

also

$$g(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = -\sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$$

$$= -\sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{\mu(k)\log k}{k} \frac{1}{\log k} = -\sum_{k=x+1}^{\infty} (f(k) - f(k-1)) \frac{1}{\log k}$$

$$= -\sum_{k=x+1}^{\infty} (\eta(k) - \eta(k-1)) \frac{1}{\log k} = -\sum_{k=x+1}^{\infty} \eta(k)\left(\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)}\right) + \frac{\eta(x)}{\log(x+1)};$$

nach Annahme von δ ist nun k_0 so bestimmbar, dass für alle $k \geqq k_0$ $|\eta(k)| \leqq \delta$ ist; für $x \geqq k_0$ ist also

$$|g(x)| < \delta \sum_{k=x+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)}\right) + \frac{\delta}{\log(x+1)} = \frac{\delta}{\log(x+1)} + \frac{\delta}{\log(x+1)} < \frac{2\delta}{\log x},$$

womit (175.) bewiesen ist. Ebenso lässt sich (167.) aus (173.) herleiten.

Die rechte Seite von (170.) zerlege ich nun in zwei durch $\frac{x}{\log^2 x}$ geschiedene Theile:

$$(176.)\qquad -\psi(x) = \sum_{k=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \mu(k)\left[\frac{x}{k}\right] \log k + \sum_{k=\frac{x}{\log^2 x}\text{ excl.}}^{x} \mu(k)\left[\frac{x}{k}\right] \log k = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Hierin ist nach (172.)

*) S. 574—579.

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \mu(k)\log k\left(\frac{x}{k}+O(1)\right) = x\sum_{k=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \frac{\mu(k)\log k}{k} + O\sum_{k=1}^{\frac{x}{\log^2 x}} \log k$$

$$= xf\left(\left[\frac{x}{\log^2 x}\right]\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\right)$$

$$= x\left(-1+O\frac{1}{\log\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)}\right) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\log x\right)$$

$$(177.)\qquad = -x + \{x\},$$

und nach (171.)

$$\Sigma_2 = \sum_{k=\frac{x}{\log^2 x}\text{ excl.}}^{x} \left[\frac{x}{k}\right](\chi(k)-\chi(k-1))$$

$$= \sum_{k=\frac{x}{\log^2 x}\text{ excl.}}^{x} \chi(k)\left(\left[\frac{x}{k}\right]-\left[\frac{x}{k+1}\right]\right) + O\left(\frac{x}{\frac{x}{\log^2 x}}\chi\left(\left[\frac{x}{\log^2 x}\right]\right)\right)$$

$$= O\sum_{k=\frac{x}{\log^2 x}}^{x} \frac{k}{(\log\log k)^2}\left(\left[\frac{x}{k}\right]-\left[\frac{x}{k+1}\right]\right) + O\left(\log^2 x\frac{x}{\log^2 x\left(\log\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\right)^2}\right).$$

Nun ist für $k \geqq \frac{x}{\log^2 x}$

$$0 < \frac{x}{k} - \frac{x}{k+1} = \frac{x}{k(k+1)} \leqq \frac{x}{k^2} < \frac{\log^4 x}{x} < 1$$

bei hinreichend grossen x; daher ist in der letzten Summe $\left[\frac{x}{k}\right]-\left[\frac{x}{k+1}\right]$ nur der Werthe 0 und 1 fähig und nur dann $=1$, wenn es ein ganzes m giebt, sodass $\frac{x}{k} \geqq m > \frac{x}{k+1}$, d. h. $\frac{x}{m} - 1 < k \leqq \frac{x}{m}$, also für $k = \left[\frac{x}{m}\right]$ $(m = 1, 2, \ldots)$; folglich ist, da kein $m > \log^2 x$ ein $k \geqq \frac{x}{\log^2 x}$ liefert,

$$\Sigma_2 = O\sum_{m=1}^{\log^2 x} \frac{x}{m\left(\log\log\frac{x}{m}\right)^2} + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^2}\right)$$

$$= \frac{x}{\left(\log\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\right)^2} O\sum_{m=1}^{\log^2 x}\frac{1}{m} + \{x\}$$

$$= \frac{x}{(\log\log x)^2} O(\log(\log^2 x)) + \{x\}$$

$$= \frac{x}{(\log\log x)^2} O(\log\log x) + \{x\}$$

$$= \{x\}. \qquad (178.)$$

(177.) und (178.) ergeben, in (176.) eingesetzt:

$$\psi(x) = x + \{x\},$$

$$\psi(x) \backsim x,$$

$$\pi(x) \backsim \frac{x}{\log x},$$

womit die Behauptung auf S. 183–184 bewiesen ist.

Die Stabilität des Gleichgewichts hängender schwerer Fäden.

(Von Herrn *Adolf Kneser* in Berlin.)

§ 1.

Das Problem.

Es scheint allgemein angenommen zu werden, dass das Gleichgewicht einer stetig zusammenhängenden deformirbaren Masse stabil ist, wenn die wirkenden Kräfte ein Potential besitzen, welches in der Gleichgewichtslage ein Maximum erreicht. Beim schweren Faden z. B., der zwischen zwei befestigten Punkten in Gestalt der gewöhnlichen Kettenlinie herabhängt, sieht man das Gleichgewicht als stabil an, weil der Schwerpunkt des Fadens möglichst tief liegt; man hat für diesen Fall auch die Theorie der kleinen Schwingungen ausgebildet. Es ist aber wohl zu beachten, dass der klassische Beweis, durch welchen *Dirichlet* eine strenge Theorie der Stabilität begründet hat*), sich zunächst nur auf ein von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängendes Massensystem bezieht. Versucht man, diesen Beweis auf deformirbare Massensysteme anzuwenden, deren Lage durch willkürliche Functionen bestimmt wird, so stösst man auf eine ganz ähnliche Schwierigkeit wie in der Potentialtheorie beim *Dirichlet*schen Princip.

Der Grundgedanke des *Dirichlet*schen Beweises kann in folgender Form ausgesprochen werden. Ist U das Potential, U_m sein Maximalwerth

*) Dieses Journal, Bd. 32. *Kirchhoff*, Mechanik, 4. Vorlesung. *Appell*, Traité de mécanique, Bd. II, No. 454.

für die betrachtete Gleichgewichtslage, so grenze man um diese herum ein Gebiet $\mathfrak{G}$ ab, das von einem die Gleichgewichtslage nicht enthaltenden Randgebiet $\mathfrak{R}$ umschlossen werde; innerhalb der Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{R}$ sei $U_m - U$ positiv. Hängt die Lage des Systems z. B. von den n Parametern $q_1, q_2, \dots q_n$ ab, und ist in der Gleichgewichtslage

$$q_1 = q_1^0, \; q_2 = q_2^0, \; \dots, \; q_n = q_n^0,$$

so werde das Gebiet $\mathfrak{G}$ durch die Ungleichungen

$$|q_1 - q_1^0| \leqq \varepsilon, \; |q_2 - q_2^0| \leqq \varepsilon, \; \dots, \; |q_n - q_n^0| \leqq \varepsilon$$

definirt, in welchen ε eine positive Constante bedeutet, und $\mathfrak{R}$ sei der Theil von $\mathfrak{G}$, für welchen mindestens eine der Gleichungen

$$|q_1 - q_1^0| = \varepsilon, \; |q_2 - q_2^0| = \varepsilon, \; \dots, \; |q_n - q_n^0| = \varepsilon$$

gilt. Nun beruht alles darauf, dass die Differenz $U_m - U$ auf dem Gebiet $\mathfrak{R}$ oberhalb einer festen positiven Grösse c verbleibt; ist nämlich T die lebendige Kraft des Systems und setzt man die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form

$$T + U_m - U = \text{const.}$$

an, so braucht man nur die Anfangsgeschwindigkeiten so klein und die Anfangslage des Systems so nahe der Gleichgewichtslage zu wählen, dass die rechte Seite dieser Gleichung kleiner als c ist. Bei einer solchen Störung des Gleichgewichts kann, da T nicht negativ wird, die Differenz $U_m - U$ niemals den Werth c erreichen, das System also nie in eine dem Gebiet $\mathfrak{R}$ angehörige Lage kommen und das Gebiet $\mathfrak{G}$ demnach niemals verlassen, womit die Stabilität des Gleichgewichts erwiesen ist.

Dass aber eine Constante c von der angegebenen Beschaffenheit existirt, ist leicht ersichtlich, wenn U, wie es natürlich ist, als stetige Function der Grössen $q_1, q_2, \dots q_n$ vorausgesetzt wird. Dann ist die Grösse $U_m - U$ auch stetige Function des Ortes im Gebiet $\mathfrak{R}$, und hieraus folgt nach *Weierstrass*, dass sie die untere Grenze ihrer Werthe im Gebiet $\mathfrak{R}$ erreicht; da nun $U_m - U$ stets positiv ist, so ist die untere Grenze ebenfalls positiv und nicht etwa Null.

Diese Schlussreihe muss ergänzt werden, wenn die Lage des Massensystems nicht von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängt, wie z. B. bei einem schweren zwischen den festen Punkten 0 und 1 herabhängenden Faden, den wir uns für den Augenblick nur in seiner Verticalebene ver-

schiebbar denken; auf diese Ebene werde demgemäss vorläufig die ganze Betrachtung beschränkt. Man umgebe den hängenden Faden mit einer Curve $\mathfrak{K}$, etwa mit der Enveloppe eines Kreises von constantem Radius, dessen Mittelpunkt längs des Fadens läuft. Dann kann man dem Gebiet $\mathfrak{G}$ die Gesammtheit der Curven 01 vergleichen, welche ebenso lang wie der Faden sind und die Curve $\mathfrak{K}$ nicht überschreiten; dem Gebiet $\mathfrak{R}$ aber entsprechen von diesen Curven diejenigen, welche mit $\mathfrak{K}$ mindestens einen Punkt gemein haben. Bedeutet U für irgend einen dieser Bögen die Tiefe des Schwerpunktes unter einer festen horizontalen Ebene multiplicirt mit der Masse des Fadens, U_m den der Kette entsprechenden Maximalwerth von U, so kommt es darauf an, ob die Differenz $U_m - U$ für das Gebiet $\mathfrak{R}$ oberhalb einer festen positiven Grenze bleibt; ist dies gezeigt, so gilt der *Dirichlet*sche Beweis ohne Modification. Aber wenn auch bei geeigneter Bestimmung der Curve $\mathfrak{K}$ die Grösse $U_m - U$ stets positiv ist, so folgt doch keineswegs hieraus, dass auch ihre untere Grenze positiv ist; denn $U_m - U$ erscheint jetzt nicht als Function einer gewissen Anzahl von Argumenten, sondern wird durch einen innerhalb gewisser Grenzen willkürlichen functionalen Zusammenhang bestimmt. Die erwähnte Schlussweise von *Weierstrass* kann daher nicht angewandt werden, und es ist zunächst sehr wohl denkbar, dass die Differenz $U_m - U$ im Gebiet $\mathfrak{R}$ beliebig kleine Werthe annimmt.

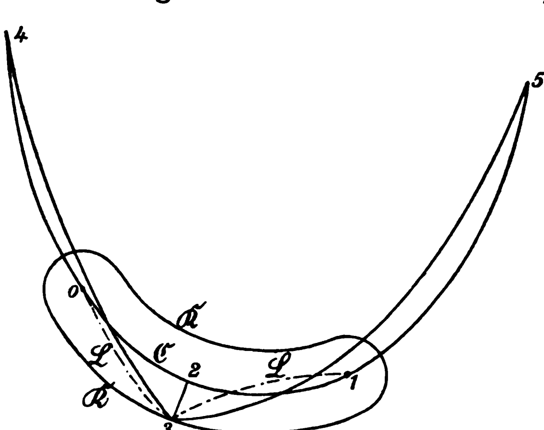
Man sieht, insofern sich auch hier das Bedenken gegen die gewöhnliche Argumentation daraus ergiebt, dass es nöthig wird, zwischen unterer Grenze und Minimum zu unterscheiden, liegt eine ähnliche Schwierigkeit vor wie beim *Dirichlet*schen Princip. Für den in einer Kettenlinie hängenden Faden überwindet man, wie wir zeigen wollen, diese Schwierigkeit durch Betrachtungen, die zwar auf der besonderen Natur der speciellen Aufgabe zu beruhen scheinen, im Grunde aber von allgemeinerem Charakter sind und deshalb in wenig modificirter Gestalt auch bei anderen Stabilitätsfragen anzuwenden sein dürften.

§ 2.

Beweis der Stabilität.

Wir stellen zwei Sätze an die Spitze der Untersuchung, die man plausibel finden oder als bekannt ansehen wird, und die wir, soweit es nöthig ist, in § 3 beweisen wollen.

I. Irgend zwei Punkte 0 und 1, die nicht auf derselben Verticalen liegen, können stets durch eine einzige nach unten convexe Kettenlinie von gegebener Länge l verbunden werden, wenn l grösser ist als der geradlinige Abstand der Punkte 0 und 1. Fasst man diese Kettenlinie als homogenen schweren Faden auf, so ändert sich ihr Schwerpunkt stetig mit den Endpunkten und der Länge l.



Wir verstehen dabei unter einer Kettenlinie wie gewöhnlich eine ebene Curve, für welche, wenn ξ und η rechtwinklige Coordinaten eines gewissen Systems und a, b, c Constante sind, die Gleichung

$$\eta + c = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{\xi-b}{a}} + e^{-\frac{\xi-b}{a}}\right\} = a\,\mathfrak{Cos}\,\frac{\xi-b}{a}$$

gilt. Die Curve ist nach unten convex, wenn a negativ ist und die positive η-Axe vertical abwärts geht.

II. Der Schwerpunkt einer dem Satze I gemäss construirten Kettenlinie liegt tiefer als der Schwerpunkt jeder andern Curve 01 von der Länge l.

Um von diesen Sätzen aus unserem Ziel näher zu kommen, führen wir die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z ein, legen die positive y-Axe vertical nach unten, bezeichnen durch $\mathfrak{C}$ die nach unten convexe Kettenlinie 01, und setzen allgemein, wenn längs irgend einer Curve integrirt wird,

$$J = \int y\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad K = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

sodass K die Bogenlänge, J die mit der Bogenlänge multiplicirte verticale Schwerpunktsordinate oder das statische Moment bezüglich der horizontalen Ebene $y = 0$ bedeutet. Wir bezeichnen ferner das Integrationsintervall durch Suffixe, sodass z. B. J_{01} das für einen Bogen 01 gebildete Integral J ist, und deuten durch Ueberstreichen an, dass längs einer nach unten convexen Kettenlinie integrirt wird; dann gilt z. B. für die Curve $\mathfrak{C}$ die Gleichung

$$\bar{K}_{01} = l.$$

Längs des Bogens $\mathfrak{C}$ laufe nun ein Punkt 2, um den eine Kugel mit dem constanten Radius ϱ beschrieben sei. Die sämmtlichen Lagen dieser Kugel erfüllen ein den Bogen $\mathfrak{C}$ umgebendes räumliches Gebiet $\mathfrak{U}$, dessen Oberfläche aus einer Kanalfläche und zwei um 0 und 1 beschriebenen Halbkugeln besteht und durch $\mathfrak{K}$ bezeichnet werde. Der Radius ϱ kann dann so gewählt werden, dass, wenn 3 ein Punkt der Fläche $\mathfrak{K}$ ist und geradlinige Entfernungen durch (03) und ähnliche Symbole dargestellt werden, stets die Ungleichung

$$(1.) \qquad (03)+(31)<l$$

gilt. Liegt nämlich der Punkt 3 jeweils auf der um das Centrum 2 beschriebenen Kugel, sodass

$$(23)=\varrho$$

gesetzt werden kann, so ist

$$(03)\leqq(02)+\varrho, \quad (13)\leqq(12)+\varrho,$$

$$(2.) \qquad (03)+(31)\leqq(02)+(12)+2\varrho.$$

Die Strecken (02) und (12) sind aber kürzer als die längs der Curve $\mathfrak{C}$ gemessenen Bögen 02 und 12; die Summe $(02)+(12)$, die sich mit dem Punkte 2 stetig ändert, hat daher ein Maximum, welches kleiner als l ist, und es giebt eine positive Grösse l', für welche die Ungleichungen

$$0<l'<l,$$

$$(3.) \qquad (02)+(12)<l'$$

bei jeder Lage des Punktes 2 gelten. Jetzt braucht man nur ϱ so klein zu nehmen, dass

$$l'+2\varrho<l$$

ist, um durch Combination der Beziehungen (2.) und (3.) die gewünschte Ungleichung (1.) zu sichern.

Es seien ferner 4 und 5 zwei Punkte der den Bogen $\mathfrak{C}$ enthaltenden Kettenlinie, welche diesem nicht angehören, durch ihn getrennt werden und mit keinem Punkte der Fläche $\mathfrak{K}$ auf derselben Verticalen liegen. Verläuft die Kettenlinie $\mathfrak{C}$ in der xy-Ebene, und werden die Coordinaten der durch Ziffern bezeichneten Punkte durch entsprechende Suffixe unterschieden, sodass z. B. x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes 0 sind u. s. f.; ist ferner $x_1>x_0$, so braucht man, um das bezeichnete Ziel zu erreichen, die Punkte 4 und 5 nur so zu wählen, dass

$$x_4<x_0-\varrho, \quad x_5>x_1+\varrho.$$

Wenn nun die Punkte 0 und 1 durch irgend eine Curve $\mathfrak{L}$ verbunden werden, die ebenso wie $\mathfrak{C}$ die Länge l hat, die Fläche $\mathfrak{K}$ im Punkte 3 erreicht, übrigens aber das Gebiet $\mathfrak{U}$ nicht verlässt, so beziehe man auf diese Curve die ungestrichenen Integrale J, K und construire dem Theorem I gemäss (vgl. die Figur) die nach unten convexen Kettenlinien 43 und 35, deren Bogenlängen

$$(4.)\qquad \overline{K}_{43} = \overline{K}_{40} + K_{03}, \quad \overline{K}_{35} = K_{31} + \overline{K}_{15}$$

sind. Das ist möglich, da die Punkte 4 und 3 ebenso wenig wie 5 und 3 auf derselben Verticalen liegen, und ausserdem die Ungleichungen

$$\overline{K}_{40} + K_{03} > (40) + (03) \geqq (43),$$

$$K_{31} + \overline{K}_{15} > (31) + (15) \geqq (53)$$

gelten, sodass die für die Kettenlinien 43 und 35 vorgeschriebenen Längen stets grösser sind als der geradlinige Abstand der Endpunkte. Für diese Kettenlinien ergeben sich ferner aus dem Theorem II die Ungleichungen

$$(5.)\qquad \overline{J}_{43} \geqq \overline{J}_{40} + J_{03}, \quad \overline{J}_{35} \geqq J_{31} + \overline{J}_{15},$$

in denen das Gleichheitszeichen nur in den Ausnahmefällen gilt, dass z. B. die Kettenlinie 43 mit dem Linienzug 403, für welchen die Summe $\overline{J}_{40} + J_{03}$ gebildet ist, zusammenfällt; denn die Brüche

$$\frac{\overline{J}_{43}}{\overline{K}_{43}}, \frac{\overline{J}_{40} + J_{03}}{\overline{K}_{40} + K_{03}}$$

sind die verticalen Schwerpunktsordinaten der Kettenlinie 43 und jenes Linienzuges 403; die beiden Nenner sind aber der Voraussetzung (4.) zufolge gleich. Aus den Relationen (5.) folgt sodann

$$\overline{J}_{45} - (\overline{J}_{43} + \overline{J}_{35}) \leqq \overline{J}_{45} - \overline{J}_{40} - \overline{J}_{15} - J_{031}$$

oder

$$(6.)\qquad \overline{J}_{45} - (\overline{J}_{43} + \overline{J}_{35}) \leqq \overline{J}_{01} - J_{031};$$

dabei gilt den Festsetzungen (4.) zufolge und weil die Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ gleich lang sind, die Gleichung

$$\overline{K}_{43} + \overline{K}_{35} = \overline{K}_{40} + \overline{K}_{15} + K_{012} = \overline{K}_{40} + \overline{K}_{15} + \overline{K}_{01}$$

oder

$$(7.)\qquad \overline{K}_{43} + \overline{K}_{35} = \overline{K}_{45}.$$

Jetzt ist das nächste Ziel der Untersuchung, zu zeigen, dass die Grösse $\overline{J}_{45} - (\overline{J}_{43} + \overline{J}_{35})$ bei einer beliebigen Curve $\mathfrak{L}$ und beliebiger Lage des

der in der Curve 45 als Theil enthaltene Bogen 43 kommt also nicht unter den oben definirten Kettenlinien vor, und die letzteren weichen auf der Strecke 43 von der Kettenlinie 45 ab. Damit ist gezeigt, dass auch in diesem Falle der oben construirte Linienzug 435 mit 45 nicht zusammenfällt. Man kann daher stets aus der Gleichung (9.), nach welcher $\bar{K}_{45}$ die Gesammtlänge des Zuges 435 ist, und dem Theorem II schliessen

$$\bar{J}_{45} > \bar{J}_{43} + \bar{J}_{35}, \quad \bar{J}_{45} - \bar{J}_{43} - \bar{J}_{35} > 0,$$

oder, wenn

$$S = \bar{J}_{45} - \bar{J}_{43} - \bar{J}_{35}$$

gesetzt wird,

$$S > 0. \tag{12.}$$

Um hieraus das gewünschte Resultat zu erhalten, dass bei allen Lagen des Punktes 3 und allen jeweils zugelassenen Werthen von λ die Grösse S oberhalb einer positiven Constanten bleibt, braucht man sich nur klar zu machen, dass S nach dem Theorem I eine stetige Function von λ und der Lage des Punktes 3 ist. Da nun die in Betracht kommenden Werthsysteme x_3, y_3, z_3, λ eine endliche abgeschlossene*) Menge bilden, d. h. jede der Variablen zwischen endlichen Grenzen bleibt und jedes Werthsystem der Menge angehört, dem man sich mit Werthsystemen der Menge beliebig annähern kann, so folgt**), dass die Grösse S an mindestens einer Stelle der Menge ihrer unteren Grenze gleich wird. Die Werthe aber, welche S erreicht, sind nach (12.) positiv; also gilt dasselbe von der unteren Grenze, und es giebt positive Constanten c, für welche bei allen Lagen des Punktes 3 und allen zugelassenen Werthen von λ die Ungleichung

$$S > c > 0 \tag{13.}$$

gilt.

Diesen Schluss kann man auch unabhängig von den allgemeinen Begriffen der Mengenlehre entwickeln, indem man davon ausgeht, dass bei irgend einer Lage des Punktes 3 der Werth von S eine stetige Function der einen Variablen λ ist, welche ein wohldefinirtes Intervall mit Einschluss der Grenzen durchläuft. Hier lehrt also der bekannte Satz von *Weierstrass* über stetige Functionen einer Variablen, dass die Grösse S für mindestens

*) „Ensemble borné et parfait" nach *Jordan* Cours d'analyse, 2. Aufl., I No. 20, 26.

**) *Jordan*, a. a. O. No. 64.

einen bestimmten Werth von λ ihr Minimum, das durch m_3 bezeichnet werde, erreicht. Denkt man sich diese Minima für alle Punkte 3 bestimmt, und ist u deren untere Grenze, mithin auch die untere Grenze aller Werthe von S, so muss es mindestens einen solchen Punkt 6 auf der Fläche $\mathfrak{K}$ geben, dass in beliebiger Nähe desselben Punkte 3 vorhanden sind, deren Minima m_3 von u so wenig abweichen, wie man will. Wäre nun

$$(14.) \qquad u < m_6,$$

so würde sich ein Widerspruch in folgender Weise ergeben. Da S eine stetige Function von λ und dem Orte des Punktes 3 ist, da ferner die Grenzen, zwischen denen sich λ der Ungleichung (8.) gemäss bewegt, sich mit 3 stetig ändern, so kann man, wenn die positive Grösse ε beliebig klein gegeben ist, eine andere ε_1 so bestimmen, dass immer, wenn

$$(15.) \qquad (36) < \varepsilon_1$$

ist, zu jedem der im Punkte 3 zulässigen Werthe λ ein entsprechender im Punkte 6 zulässiger gefunden werden kann, der von jenem um weniger als ε abweicht. Zu jeder für den Punkt 3 gebildeten Grösse S giebt es also bei der Annahme (15.) eine entsprechende zum Punkte 6 gehörige, deren Abstand von jener unter einer mit ε und ε_1 unendlich abnehmenden Grenze verbleibt. Das steht aber im Widerspruch zu der Annahme (14.), nach welcher in beliebiger Nähe des Punktes 6 solche Werthe von S erreicht würden, die beliebig wenig von u, also von jedem im Punkte 6 erreichten Werthe um mehr als z. B. $\frac{1}{2}(m_6 - u)$ abwichen. Die Annahme (14.) ist also nicht zu halten, und es folgt

$$u = m_6,$$

sodass u in der That einer der Werthe von S ist, welche an der Stelle 6 erreicht werden. Damit ist u als positiv nachgewiesen; ist ferner c kleiner als u, so besteht die Ungleichung (13.) oder

$$\bar{J}_{45} - \bar{J}_{43} - \bar{J}_{35} > c$$

ganz allgemein, und die Relation (6.) ergiebt

$$\bar{J}_{01} - J_{031} > c.$$

Von diesem Resultat aus kann der *Dirichlet*sche Beweis leicht durchgeführt werden. Da nämlich l die gemeinsame Länge der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ ist, sind

$$\frac{\bar{J}_{(1)}}{l}, \quad \frac{J_{(3)}}{l}$$

ihre Schwerpunktsordinaten; wird daher die Längendichtigkeit des Fadens $= 1$, seine Masse also $= l$ gesetzt, so sind

$$U_m = \bar{J}_{(1)}, \quad U = J_{(3)}$$

die den Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ zukommenden Schwerkraftpotentiale, und wenn T die lebendige Kraft bedeutet, gilt bei jeder Bewegung eine Gleichung

$$T + U_m - U = \text{const.} \tag{16.}$$

Stört man nun das Gleichgewicht des hängenden Fadens so vorsichtig, dass er in seiner Anfangslage innerhalb des Gebietes $\mathfrak{U}$ verläuft und die rechte Seite der letzten Gleichung kleiner als c ist, so kann niemals ein Punkt des Fadens auf die Fläche $\mathfrak{K}$ fallen, da dies die Ungleichung

$$U_m - U > c$$

nach sich zöge, welche, da T positiv ist, der Gleichung (16.) widerspricht. Bei hinreichend vorsichtiger Störung des Gleichgewichts verbleibt also der Faden innerhalb des Gebietes $\mathfrak{U}$, das, da ϱ beliebig klein genommen werden kann, einer beliebig eng umschränkten Nachbarschaft der Kettenlinie 01 eingebettet werden kann.

Die Stabilität des Gleichgewichts ist hiermit bewiesen.

§ 3.

Die benutzten Hülfssätze.

Es bleibt nun übrig, einen Blick auf die Beweise der Sätze I und II zu werfen, auf welche die durchgeführte Argumentation sich gründet. Was zunächst den Satz I betrifft, so kann als hinreichend bewiesen gelten, dass zwischen gegebenen Punkten eine nach unten convexe Kettenlinie von hinreichend gross gegebener Länge existirt; es genügt in dieser Hinsicht auf die Litteratur zu verweisen.*) Der Beweis beruht stets darauf, dass die Gleichung

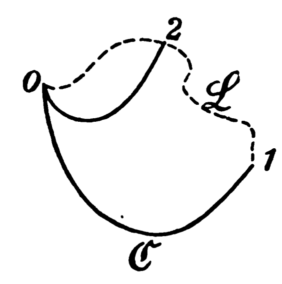
$$qu = \mathfrak{Sin}\, u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}),$$

wenn q bekannt ist, eine einzige positive Wurzel $u = v$ besitzt. Diese ändert sich offenbar stetig mit q; da nun q in einfacher Weise aus der gegebenen Länge und den Coordinaten der Endpunkte zusammengesetzt ist, die Con-

*) *Schell*, Theorie der Bewegung und Kräfte, 2. Aufl., II S. 100. *Appell*, Traité de mécanique I No. 152.

stanten der Kettenlinie aber sich sehr einfach durch v ausdrücken lassen, so ändern sich letztere Grössen stetig mit den Endpunkten und der vorgeschriebenen Länge, und dasselbe gilt demnach auch von dem längs der Kettenlinie gebildeten Integral J, womit auch der letzte Theil des Satzes I bewiesen ist.

Anders steht es mit dem Theorem II, das meines Wissens nirgends vollständig begründet ist. Man erhält einen Beweis desselben, indem man die modernen Methoden der Variationsrechnung anwendet und den Beweis für das Eintreten des Extremums bei isoperimetrischen Aufgaben ein wenig modificirt.



Die Punkte 0 und 1 seien durch eine Kettenlinie $\mathfrak{C}$ und eine ebenso lange Curve $\mathfrak{L}$ verbunden. Längs dieser seien x, y, z stetige Functionen eines von 0 nach 1 hin wachsenden Parameters τ und mögen die Eigenschaften derjenigen Functionen besitzen, die ich an einem anderen Orte*) durch $\varphi(\tau)$ bezeichnet habe: sie mögen integrirbare vordere Ableitungen besitzen, auf welche stets das Zeichen der Differentiation nach τ bezogen werde, und es gelte bei positiven Werthen ε die Beziehung

$$(1.) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \varphi'(\tau+\varepsilon) = \varphi'(\tau).$$

Hierdurch sind die unten anzuwendenden Operationen der Infinitesimalrechnung gesichert; insbesondere kann aus den Beziehungen

$$\varphi'(\tau) > 0, \qquad \varphi'(\tau) = 0$$

in der gewöhnlichen Weise geschlossen worden, dass $\varphi(\tau)$ mit τ wächst oder constant ist. Es seien ferner die Grössen $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$ an keiner Stelle sämmtlich gleich Null. Diese Voraussetzungen sind allgemein genug, um z. B. unendlich viele Ecken der Curve $\mathfrak{L}$ zuzulassen; an einer Ecke würde die Gleichung (1.) bei negativen Werthen von ε nicht bestehen, was ja auch nicht vorausgesetzt ist.

Die Curve $\mathfrak{L}$ werde ferner zunächst in folgender Weise beschränkt: sie beginne im Punkte 0 nicht mit einem geradlinigen Stück und erreiche die Verticale des Punktes 0 nicht wieder. Läuft dann der Punkt 2 auf der

*) *Kneser,* Lehrbuch der Variationsrechnung § 17.

Curve $\mathfrak{L}$, so gilt für das längs dieser gebildete Längenintegral K stets die Ungleichung

$$K_{02} > (02);$$

die Punkte 0 und 2 können daher dem Theorem I zufolge immer durch eine nach unten convexe Kettenlinie verbunden werden, deren Länge K_{02} ist und die, da $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ von gleicher Länge sind, in $\mathfrak{C}$ übergeht, wenn der Punkt 2 die Lage 1 erreicht.

Um diese Curven analytisch darzustellen, machen wir den Punkt 0 zum Coordinatenanfangspunkt, und nehmen die y-Axe wie bisher vertical abwärts; dann kann jede nach unten convexe Kettenlinie, die vom Punkte 0 ausgeht, durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$(2.)\qquad \begin{cases} x = \xi(t,a,b,m) = t\cos m, \quad z = \zeta(t,a,b,m) = t\sin m, \\ y = \eta(t,a,b,m) = a\left[\mathfrak{Cof}\,\frac{t-b}{a} - \mathfrak{Cof}\,\frac{b}{a}\right]; \end{cases}$$

dabei sind a, b, m Constante, a ist negativ, und für die vom Punkte 0 ab gemessene Bogenlänge findet man leicht

$$\bar{K}_{02} = \omega(t,a,b,m) = a\left[\mathfrak{Sin}\,\frac{t-b}{a} + \mathfrak{Sin}\,\frac{b}{a}\right].$$

Eine wichtige Eigenschaft dieser Ausdrücke besteht darin, dass die Functionaldeterminante

$$\varDelta = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta, \omega)}{\partial(t, a, b, m)}$$

nur für $t = 0$ verschwindet; sie hat nämlich die Form

$$\begin{vmatrix} \cos m & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \sin m & \frac{\partial \omega}{\partial t} \\ 0 & \frac{\partial \eta}{\partial a} & 0 & \frac{\partial \omega}{\partial a} \\ 0 & \frac{\partial \eta}{\partial b} & 0 & \frac{\partial \omega}{\partial b} \\ -t\sin m & 0 & t\cos m & 0 \end{vmatrix} = -t \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial a} & \frac{\partial \omega}{\partial a} \\ \frac{\partial \eta}{\partial b} & \frac{\partial \omega}{\partial b} \end{vmatrix},$$

und für die rechts erscheinende Determinante zweiter Ordnung ist bekannt und leicht zu beweisen*), dass sie abgesehen von $t = 0$ immer von Null verschieden ist. Hieraus folgt, dass bei der angegebenen Construction der

---

*) *Mayer*, Sächs. Berichte 1884, S. 119. *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung § 38.

Kettenlinie 02 die zugehörigen Werthe a, b, m, t von einander unabhängige Functionen der Grössen x, y, z, K_{02} sind, und endliche stetige Ableitungen nach diesen besitzen. Mittelbar sind daher a, b, m, t Functionen von τ, deren vordere Differentialquotienten sich aus den Grössen

$$\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dK_{02}}{d\tau}$$

linear mit endlichen stetigen Functionen von τ als Coefficienten zusammensetzen. Daraus ist ersichtlich, dass auch die Grössen a, b, m, t als Functionen von τ die Eigenschaften der Grössen $\varphi(\tau)$ besitzen. Dasselbe gilt auch, wenn $\Phi(a, b, m, t)$ eine mit stetigen Ableitungen versehene Function ist, von der Grösse $\Phi(a, b, m, t)$ als Function von τ, da offenbar

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\tau} + \frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\tau} + \frac{\partial\Phi}{\partial m}\frac{dm}{d\tau} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{dt}{d\tau}.$$

Diese Bemerkung wenden wir auf die Integrale $\overline{J}_{02}$ und $\overline{K}_{02}$ an, die mit der Bezeichnung

$$F(x, y, z, x', y', z') = y\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$
$$G(x, y, z, x', y', z') = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

geschrieben werden können

$$\overline{J}_{02} = \int_0^{t_2} F(\xi, \eta, \zeta, \xi_t, \eta_t, \zeta_t)\, dt,$$

$$\overline{K}_{02} = \int_0^{t_2} G(\xi, \eta, \zeta, \xi_t, \eta_t, \zeta_t)\, dt,$$

indem durch t_2 der zum Punkte 2 gehörige Werth von t bezeichnet wird, und schliessen, dass diese Grössen ebenfalls als Functionen $\varphi(\tau)$ anzusehen sind; dass dasselbe von den längs der Curve $\mathfrak{L}$ gebildeten Integralen J_{02} und K_{02} gilt, ergiebt deren Definition unmittelbar.

Setzt man ferner

$$\overline{\delta} = da\frac{\partial}{\partial a} + db\frac{\partial}{\partial b} + dm\frac{\partial}{\partial m}, \quad \delta = \overline{\delta} + dt_2\frac{\partial}{\partial t_2},$$

so findet man zunächst

$$\delta\overline{J}_{02} = F|^{t_2} dt_2 + \int_0^{t_2} (F_x\delta\xi + F_y\overline{\delta}\eta + F_z\delta\zeta + F_{x'}\overline{\delta}\xi_t + F_{y'}\overline{\delta}\eta_t + F_{z'}\overline{\delta}\zeta_t)\, dt,$$

wobei unter den Functionszeichen $F, F_x, \ldots$ immer für $x, x', \ldots$ die Werthe $\xi, \xi_t, \ldots$ gesetzt zu denken sind; da offenbar die Gleichungen

$$\bar{\delta}\xi_t = \frac{\partial \bar{\delta}\xi}{\partial t}, \quad \bar{\delta}\xi|^0 = \bar{\delta}\eta|^0 = \bar{\delta}\zeta|^0 = 0,$$

bestehen, so ergiebt die partielle Integration

$$(3.)\qquad \delta \bar{J}_{02} = F|^{t_2} dt_2 + F_{x'}\bar{\delta}\xi + F_{y'}\bar{\delta}\eta + F_{z'}\bar{\delta}\zeta|^{t_2}$$
$$+\int_0^{t_2} dt\left[\left(F_x - \frac{dF_{x'}}{dt}\right)\bar{\delta}\xi + \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dt}\right)\bar{\delta}\eta + \left(F_z - \frac{dF_{z'}}{dt}\right)\bar{\delta}\zeta\right],$$

und einen ganz ähnlichen Ausdruck erhält man für $\delta \bar{K}_{02}$, indem man F durch G ersetzt.

Nun genügen die Kettenlinien (2.) den Differentialgleichungen

$$(4.)\qquad H_x - \frac{dH_{x'}}{dt} = 0, \quad H_y - \frac{dH_{y'}}{dt} = 0, \quad H_z - \frac{dH_{z'}}{dt} = 0,$$

in welchen

$$H = F + \lambda G$$

gesetzt ist und λ eine Constante, nämlich den Werth

$$(5.)\qquad \lambda = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{b}{a}$$

bedeutet; diese Gleichungen könnte man direct verificiren, während der naturgemässe Weg der ist, dass man sie zunächst aus der Theorie des isoperimetrischen Problems ableitet, und von ihnen aus zu den Gleichungen (2.) durch eine Integration, deren Gang aus der entsprechenden Entwicklung in der Ebene*) zu ersehen ist, fortschreitet. Auf jeden Fall ergeben die Gleichungen (4.), indem man die Formel (3.) mit der entsprechend für K und G gebildeten combinirt,

$$\delta \bar{J}_{02} + \lambda \delta \bar{K}_{02} = H|^{t_2} dt_2 + H_{x'}\bar{\delta}\xi + H_{y'}\bar{\delta}\eta + H_{z'}\bar{\delta}\zeta|^{t_2},$$

oder, indem man die Identität

$$H = x'H_{x'} + y'H_{y'} + z'H_{z'}$$

berücksichtigt,

$$\delta \bar{J}_{02} + \lambda \delta \bar{K}_{02} = H_{x'}\delta\xi + H_{y'}\delta\eta + H_{z'}\delta\zeta|^{t_2}.$$

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung § 38.

Hieraus folgt, da längs der Curve $\mathfrak{L}$ überall

$$x = \xi(t_2, a, b, m), \quad y = \eta(t_2, a, b, m), \quad z = \zeta(t_2, a, b, m),$$

die Gleichung

$$\frac{d\bar{J}_{02}}{d\tau} + \lambda \frac{d\bar{K}_{02}}{d\tau} = H_{x'} \frac{dx}{d\tau} + H_{y'} \frac{dy}{d\tau} + H_{z'} \frac{dz}{d\tau},$$

in welcher τ und die Argumente der Functionszeichen $H_{x'}$, $H_{y'}$, $H_{z'}$ sich auf den Punkt 2 beziehen, sodass z. B. $t = t_2$ zu setzen ist.

Combinirt man das erhaltene Resultat mit den evidenten Gleichungen

$$\frac{dJ_{02}}{d\tau} = F\left(x, y, z, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right),$$

$$\frac{dK_{02}}{d\tau} = G\left(x, y, z, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

und den vorausgesetzten

$$(6.) \qquad K_{02} = \bar{K}_{02}, \quad \frac{d\bar{K}_{02}}{d\tau} = \frac{dK_{02}}{d\tau},$$

so ergiebt sich

$$\frac{d(\bar{J}_{02} - J_{02})}{d\tau} = H_{x'}(\xi, \eta, \zeta, \xi_t, \eta_t, \zeta_t)\frac{dx}{d\tau} + H_{y'}(\xi, \eta, \zeta, \xi_t, \eta_t, \zeta_t)\frac{dy}{d\tau}$$
$$+ H_{z'}(\xi, \eta, \zeta, \xi_t, \eta_t, \zeta_t)\frac{dz}{d\tau} - H\left(x, y, z, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

oder in der Bezeichnung von *Weierstrass*

$$(7.) \qquad \frac{d(\bar{J}_{02} - J_{02})}{d\tau} = \mathcal{E},$$

und man findet aus den expliciten Ausdrücken von F und G leicht

$$\mathcal{E} = (y + \lambda)(\cos(ds, Ds) - 1)\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2},$$

wobei ds und Ds die in der Richtung wachsender t und τ genommenen Bogenelemente der Kettenlinie 02 und der Curve $\mathfrak{L}$ im Punkte 2 bedeuten. An diesem Ausdruck ist das Vorzeichen sofort zu erkennen; aus der Gleichung (5.) und einer der Gleichungen (2.) findet man nämlich

$$y + \lambda = a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x - b}{a},$$

und da a negativ, die Function $\mathfrak{Cof}$ aber stets positiv ist, da ferner die

Quadratwurzel nach Voraussetzung nie verschwindet, so kann die Grösse $\mathfrak{G}$ keine negativen Werthe annehmen. Ist sie aber nur für eine beliebig kleine Strecke positiv, so folgt aus der Formel (7.) die gewünschte Ungleichung

$$\bar{J}_{01}-J_{01}>0,$$

in der das Integral $\bar{J}_{01}$ längs der Curve $\mathfrak{C}$ gebildet ist; denn die Differenz $\bar{J}_{02}-J_{02}$, die im Punkte 0 mit dem Werthe 0 beginnt, nimmt den Werth $\bar{J}_{01}-J_{01}$ an, wenn der Punkt 2 die Lage 1 erreicht, da die Kettenlinie 02 dann in $\mathfrak{C}$ übergeht, und die Grössen $\bar{J}_{02}$, J_{02} besitzen die Eigenschaften der Functionen $\varphi(\tau)$.

Um zu zeigen, dass der angedeutete Schluss aus der Formel (7.) wirklich gezogen werden kann, muss zunächst nachgewiesen werden, dass $\mathfrak{G}$ nicht längs der ganzen Curve $\mathfrak{L}$ verschwinden kann. In diesem Falle hätte man

$$\cos(ds,\, Ds) = 1;$$

die Richtungen ds und Ds wären also identisch, und wenn p ein positiver Proportionalitätsfactor ist, hätte man Gleichungen von der Form

$$\text{(8.)} \qquad \frac{dx}{d\tau}=p\xi_t,\quad \frac{dy}{d\tau}=p\eta_t,\quad \frac{dt}{d\tau}=p\zeta_t$$

oder auch

$$\text{(9.)} \qquad \begin{cases} \xi_t\dfrac{dt}{d\tau}+\xi_a\dfrac{da}{d\tau}+\xi_b\dfrac{db}{d\tau}+\xi_m\dfrac{dm}{d\tau}=p\xi_t, \\ \eta_t\dfrac{dt}{d\tau}+\eta_a\dfrac{da}{d\tau}+\eta_b\dfrac{db}{d\tau}+\eta_m\dfrac{dm}{d\tau}=p\eta_t, \\ \zeta_t\dfrac{dt}{d\tau}+\zeta_a\dfrac{da}{d\tau}+\zeta_b\dfrac{db}{d\tau}+\zeta_m\dfrac{dm}{d\tau}=p\zeta_t; \end{cases}$$

sodann ergeben die stets vorausgesetzten Gleichungen (6.)

$$G\left(x,y,z,\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau},\frac{dz}{d\tau}\right)=\frac{d\omega(t,a,b,m)}{d\tau}$$

oder auf Grund der Formeln (8.)

$$G(\xi,\eta,\zeta,p\xi_t,p\eta_t,p\zeta_t)=\frac{d\omega(t,a,b,m)}{d\tau}$$

oder endlich, da G hinsichtlich der letzten drei Argumente homogen von der ersten Dimension ist,

$$p\,G(\xi, \eta, \zeta, \xi_t, \eta_t, \zeta_t) = \frac{d\omega\,(t, a, b, m)}{d\tau},$$

$$\omega_t \frac{dt}{d\tau} + \omega_a \frac{da}{d\tau} + \omega_b \frac{db}{d\tau} + \omega_m \frac{dm}{d\tau} = p\,\omega_t.$$

Combinirt man diese Gleichung mit den unter (9.) zusammengestellten, so erhält man linear homogene Relationen zwischen den Grössen

$$\frac{da}{d\tau}, \frac{db}{d\tau}, \frac{dm}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} - p,$$

aus denen man schliesst, dass entweder die Determinante der Coefficienten oder die soeben hingeschriebenen vier Grössen verschwinden. Ersteres kann aber nicht eintreten, da die Determinante mit der oben betrachteten Grösse $\varDelta$ identisch, also von Null verschieden ist. Somit folgt

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{db}{d\tau} = \frac{dm}{d\tau} = 0.$$

Da nun a, b, m Functionen $\varphi(\tau)$ sind, kann man hieraus schliessen, dass diese Grössen für alle Punkte 2 dieselben Werthe haben, wie etwa im Punkte 1, die Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ also vollkommen zusammenfallen.

Wird dieser triviale Fall ausgeschlossen, so muss die Grösse $\mathfrak{S}$ für mindestens einen Werth von τ positiv sein. Dann folgt aber aus der durch die Beziehung (1.) ausgedrückten Eigenschaft der Functionen $\varphi'(\tau)$, zu denen auch $\mathfrak{S}$ gehört, dass diese auch in einem gewissen endlichen Intervall des Arguments τ überall positiv ist, und damit ist, wie schon bemerkt, die Ungleichung

$$\bar{J}_{01} - J_{01} > 0$$

bewiesen. Sie besagt, da

$$\frac{\bar{J}_{01}}{l}, \frac{J_{01}}{l}$$

die Schwerpunktsordinaten der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{L}$ sind, dass bei ersterer der Schwerpunkt tiefer liegt als bei letzterer.

Endlich vermeidet man leicht die der Curve $\mathfrak{L}$ auferlegte Beschränkung, die Verticale des Punktes 0 nicht wieder zu erreichen und nicht mit einem geradlinigen Stück zu beginnen. Man wählt, wenn diese Vor-

aussetzungen nicht zutreffen, den Punkt 3 auf der Fortsetzung der Kettenlinie 𝔈 über den Punkt 0 hinaus so, dass er mit keinem Punkte der Curve 𝔏 auf derselben Verticalen liegt, und vergleicht dann die Kettenlinie 301 mit dem Linienzug, der sich aus der Kettenlinie 30 und der Curve 𝔏 zusammensetzt. Auf diesen ist die durchgeführte Betrachtung anzuwenden, da er weder mit einem geradlinigen Stück beginnt, noch die Verticale des Punktes 3 wieder erreicht, und man findet

$$\bar{J}_{30} + J_{01} < \bar{J}_{301},$$

also wiederum

$$\bar{J}_{01} > J_{01},$$

womit das Theorem II vollständig erwiesen ist.

Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de *Tchébicheff* et, en particulier, suivant les polynomes de *Jacobi.*

(Par M. *W. Stekloff* à Charkow.)

1. Soit $p(y)$ une fonction d'une variable réelle y restant positive dans l'intervalle de $x=a$ à $x=b$ $(b>a)$.

Posons

$$F(x)=\int_a^b \frac{p(y)dy}{x-y}$$

et développons cette fonction en fraction continue de la forme

$$F(x)=\cfrac{c_1}{q_1-\cfrac{c_2}{q_2-\cfrac{c_3}{q_3-\cdots,}}} \tag{1.}$$

q_s $(s=1,2,\dots)$ étant des fonctions entières de x, c_s $(s=1,2,\dots)$ étant des constantes.

Désignons par $\varphi_n(x)$, ou simplement φ_n, le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue (1.)

On sait que

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$$

sont les polynomes en x de degré $0, 1, 2, \dots, n$.

Nous les appellerons *polynomes de Tchébicheff* (ou *fonctions de*

Tchébicheff*) *correspondant à la fonction caractéristique $p(x)$. L'équation suivante peut aussi servir à la définition des fonctions φ_n:

$$(2.)\qquad \int_a^b p\,\varphi_n\,P_{n-1}\,dx = 0,$$

P_{n-1} désignant un polynome arbitraire de degré $\leqq n-1$.

Cette équation (2.) définit complètement la fonction φ_n, en faisant abstraction d'un facteur constant indépendant de x.

On peut déterminer ce facteur par l'équation suivante:

$$(3.)\qquad \int_a^b p\,\varphi_n^2\,dx = 1.$$

Les polynomes φ_n et φ_m satisfont à l'équation

$$(4.)\qquad \int_a^b p\,\varphi_n\,\varphi_m\,dx = 0,$$

pourvu que $m \gtrless n$.

Tout polynome arbitraire P_n de degré n peut se représenter sous la forme suivante

$$(5.)\qquad P_n = A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + \cdots + A_n\varphi_n,$$

où

$$(6.)\qquad A_s = \int_a^b p\,\varphi_s\,P_n\,dx \qquad (s=0,1,2\ldots).$$

Je renvoie le lecteur, pour la démonstration de ces propriétés des fonctions φ_n, aux travaux connus de MM. ***Tchébicheff, A. Markoff, K. Possé*** et ***N. Sonine.****)

Si nous posons, en particulier,

$$(a.)\qquad p(x) = Ce^{-\alpha(x+\beta)^2}, \qquad (\alpha>0,\ a=-\infty,\ b=+\infty)$$

$$(b.)\qquad p(x) = C(x-a)^{\beta}e^{-\alpha(x-a)}, \qquad (\alpha>0,\ \beta>-1,\ b=+\infty)$$

$$(c.)\qquad p(x) = C(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}, \qquad (\alpha>0,\ \beta>0),$$

---

*) *Tchébicheff*, divers mémoires dans les „Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg", „Journal de Liouville" et „Acta Mathematica" (de 1859 jusqu'à 1886). ***A. Markoff***, „Sur quelques applications des fractions continues algébriques". St.-Pétersbourg, 1884 (en russe). ***K. Possé***, „Sur quelques applications des fractions continues algébriques". St.-Pétersbourg, 1886. ***N. Sonine***, „Sur le calcul approximatif des intégrales définies." Varsovie, 1887 (en russe).

C, α, β étant des constantes, nous obtiendrons trois classes particulières des polynomes de *Tchébicheff*, indiqués par l'illustre géomètre en 1859.

Nous les appellerons, d'après *M. Sonine, fonctions spéciales de M. Tchébicheff*.

Dans le cas (c.) ces fonctions coïncident avec *les polynomes de Jacobi* (fonctions analogues aux fonctions de *Legendre*, d'après *Tchébicheff*) qui les a considérés le premier dans le tome LVI du Journal de *Crelle*.

Il est intéressant d'étudier le problème du développement d'une fonction donnée en séries, procédant suivant les fonctions de *Tchébicheff*, par la même méthode que j'ai employée dans mes recherches antérieures sur les diverses questions de la Physique mathématique.*)

Je me bornerai cependant au dernier cas, le plus intéressant, des polynomes de *Jacobi*, en me réservant d'étudier les deux premiers cas [(a.) et (b.)] dans un autre travail.

Ici je remarquerai seulement que la méthode que nous allons exposer dans ce Mémoire s'applique sans peine aux deux premières classes des fonctions spéciales de *Tchébicheff*.

2. Considérons d'abord le cas général.

Soit $p(x)$ une fonction arbitraire, positive dans l'intervalle donné (a, b), et soient φ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ les polynomes de *Tchébicheff* correspondant à la fonction $p(x)$ (ou simplement p).

Soit $f(x)$ (ou simplement f) une fonction quelconque, intégrable dans l'intervalle (a, b).

Posons

$$f = \sum_{x=0}^{p} A_x \varphi_x + R_p, \quad A_x = \int_a^b p f \varphi_x \, dx. \tag{7.}$$

On trouve, en tenant compte de (3.) et (4.),

$$\int_a^b p f^2 \, dx = \sum_{x=0}^{p} A_x^2 + S_p, \tag{8.}$$

où l'on a posé

$$S_p = \int_a^b p R_p^2 \, dx. \tag{9.}$$

*) *W. Stekloff*, „Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. *H. Poincaré*." Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1901. „Problème de refroidissement d'une barre hétérogène." Ibid., 1902.

L'équation (8.) montre que S_p *décroît, lorsque p croît indéfiniment,* et que *la série*

$$\sum_{x=0}^{\infty} A_x^2$$

converge, quelle que soit la fonction f, intégrable dans l'intervalle donné (a, b).

La somme de cette série ne surpasse pas la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b p f^2 dx,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\sum_{x=0}^{\infty} A_x^2 \leqq \int_a^b p f^2 dx. \tag{10.}$$

3. Multiplions maintenant l'équation (5.) par $p f dx$ et l'intégrons entre les limites a et b.

On trouve

$$\int_a^b p f P_n dx = \sum_{x=0}^{x=n} A_x B_x, \tag{11.}$$

où l'on a posé

$$B_x = \int_a^b p f \varphi_x dx, \quad A_x = \int_a^b p P_n \varphi_x dx.$$

L'équation (11.) a lieu, quelle que soit la fonction arbitraire f. Employons maintenant le théorème suivant de M. *E. Picard*, représentant une extension du théorème connu de *Weierstrass* sur la représentation approchée des fonctions*):

Quelle que soit la fonction f, continue dans l'intervalle (a, b), *on peut toujours construire une suite de quantités positives, données à l'avance,*

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s, \ldots,$$

formant une série convergente, et déterminer une suite de polynomes

$$P_0, P_1, \ldots, P_s, \ldots$$

tels qu'on ait

$$|P_s| < \varepsilon_s, \tag{12.}$$

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} P_s \tag{13.}$$

dans l'intervalle (a, b).

*) *Émile Picard*, „Traité d'Analyse". T. I, p. 275. Paris, 1901.

La série $\sum_{s=0}^{\infty} P_s$ ***converge absolument et uniformément dans l'intervalle donné.***

On peut donc écrire

$$f^2 = \sum_{s=0}^{\infty} P_s^2 + 2 \sum_{s=0}^{\infty} Q_s P_s, \tag{14.}$$

$$Q_s = \sum_{x=s+1}^{\infty} P_x \qquad (s=0,1,2,\ldots).$$

Les séries

$$\sum_{s=0}^{\infty} P_s^2 \text{ et } \sum_{s=0}^{\infty} Q_s P_s$$

convergent absolument et uniformément.

On peut poser, en effet,

$$\varepsilon_s = a \mu^s, \tag{15.}$$

a étant un nombre positif, μ étant un nombre donné à l'avance, ***plus petit que l'unité.***

La convergence de la série ΣP_s^2 est évidente; quant à la série $\Sigma Q_s P_s$, sa convergence résulte immédiatement de ce que, en vertu de (15.),

$$|Q_s| < \sum_{x=s+1}^{\infty} |P_x| < \frac{a}{1-\mu} \mu^{s+1} \tag{16.}$$

et

$$|Q_s P_s| < \frac{a^2}{1-\mu} \mu^{2s+1}.$$

Comme P_s est un polynome de degré s, on peut écrire, en tenant compte de (11.),

$$\int_a^b p P_s^2 dx = \sum_{x=0}^{x=s} A_{sx}^2, \tag{17.}$$

où l'on a posé

$$A_{sx} = \int_a^b p \varphi_x P_s dx.$$

On a de même

$$\int_a^b p Q_s P_s dx = \sum_{x=0}^{x=s} A_{sx} B_{sx}, \tag{18.}$$

où

$$B_{s\varkappa} = \int_a^b p\,\varphi_\varkappa Q_s\,dx.$$

On trouve, en vertu de (17.),

$$(19.)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\int_a^b p P_s^2\,dx = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=s} A_{s\varkappa}^2.$$

Cette série converge absolument.

On peut donc changer l'ordre des sommations et écrire

$$(20.)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=s} A_{s\varkappa}^2 = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} A_{s\varkappa}^2,$$

puisque, en vertu de (2.),

$$A_{s\varkappa} = 0$$

pour toutes les valeurs de l'indice $s < \varkappa$.

Considérons maintenant la série

$$(21.)\qquad S = 2\sum_{s=0}^{\infty}\int_a^b p\,Q_s P_s\,dx.$$

On a, en vertu de (18.),

$$(22.)\qquad S = 2\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=s} A_{s\varkappa} B_{s\varkappa}.$$

Démontrons que cette série converge absolument.

Posons

$$\sigma_s = 2\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=s} |A_{s\varkappa}|\,|B_{s\varkappa}|$$

et considérons la série

$$(23.)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\sigma_s.$$

On a

$$\sigma_s < \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=s}(A_{s\varkappa}^2 + B_{s\varkappa}^2).$$

Mais, en vertu de (17.) et de (10.),

$$\sum_{k=0}^{\varkappa=s} A_{s\varkappa}^2 = \int_a^b p P_s^2\,dx, \quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=s} B_{s\varkappa}^2 < \int_b^b p\,Q_s^2\,dx,$$

d'où

$$\sigma_s < \int_a^b p P_s^2\,dx + \int_a^b p\,Q_s^2\,dx.$$

De cette inégalité on tire, en tenant compte de (12.), (15.) et (16.),

$$\sigma_s < M\mu^{2s},$$

où l'on a posé

$$M = a^2\left(1+\frac{a^2}{(1-\mu)^2}\right)\int_a^b p\,dx.$$

Cette inégalité montre que ***la série*** (23.) ***converge absolument.***

On peut donc écrire, comme précédemment,

$$(24.)\qquad 2\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{x=s} A_{sx}B_{sx} = 2\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} A_{sx}B_{sx}.$$

D'autre part, la série (14.) étant uniformément convergente, on trouve

$$\int_a^b p f^2\,dx = \sum_{s=0}^{\infty}\int_a^b p P_s^2\,dx + 2\sum_{s=0}^{\infty}\int_a^b p\,Q_s P_s\,dx,$$

d'où, en tenant compte de (19.), (20.), (21.) et (22.),

$$\int_a^b p f^2\,dx = \sum_{x=0}^{\infty}\Big(\sum_{s=}^{\infty} A_{sx}^2 + 2\sum_{s=0}^{\infty} A_{sx}B_{sx}\Big).$$

Mais, la série (13.) étant uniformément convergente, on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_{sx}^2 + 2\sum_{s=0}^{\infty} A_{sx}B_{sx} = \Big(\sum_{s=0}^{\infty}\int_a^b p\,\varphi_x P_s\,dx\Big)^2$$

$$= \Big(\int_a^b p\,\varphi_x\Big(\sum_{s=0}^{\infty} P_s\Big)dx\Big)^2 = A_x^2,$$

où l'on a posé

$$A_x = \int_a^b p f\varphi_x\,dx.$$

On trouve donc

$$(25.)\qquad \int_a^b p f^2\,dx = \sum_{x=0}^{\infty} A_x^2,$$

c'est-à-dire [l'égalité (9.)]

$$(26.)\qquad \lim_{p=\infty} S_p = \lim_{p=\infty}\int_a^b p\,R_p^2\,dx = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Quelle que soit la fonction f, continue dans l'intervalle donné (a, b), on a toujours*

$$\int_a^b p f^2 \, dx = \sum_{x=0}^{\infty} A_x^2, \quad A_x = \int_a^b p f \varphi_x \, dx,$$

$\varphi_x (x = 0, 1, 2, \ldots)$ *étant les polynomes de Tchébicheff correspondant à la fonction donnée p**).

4. Soit ψ une autre fonction satisfaisant à une seule condition

$$\int_a^b \psi^2 \, dx < Q^2,$$

Q étant un nombre assignable.

Multiplions l'équation (7.) par $\psi \, dx$ et l'intégrons entre les limites a_1 et x en supposant que

$$a \leqq a_1 < b, \quad a < x < b.$$

On trouve

$$\int_{a_1}^x f \psi \, dx = \sum_{x=0}^{x=p} A_x B_x(x) + \int_{a_1}^x R_p \psi \, dx,$$

où l'on a posé

$$B_x(x) = \int_{a_1}^x \psi \varphi_x \, dx.$$

Il est évident que

$$|r_p| = \left| \int_{a_1}^x \psi R_p \, dx \right| < Q \sqrt{S_p}.$$

Comme S_p tend vers zéro, lorsque p croît indéfiniment, on peut trouver un nombre m indépendant de x et tel qu'on ait, pour $n > m$,

$$|r_p| < \varepsilon,$$

quel que soit le nombre positif ε.

---

*) On peut démontrer que ce théorème reste vrai pour toute fonction f, finie et intégrable dans l'intervalle (a, b), mais ici je n'insiste pas sur ce point. Comparez mon ouvrage „Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique". Charkow 1901, pp. 255—258.

La série

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_\varkappa B_\varkappa(x)$$

converge donc uniformément à l'intérieur de l'intervalle (a, b).

On obtient ainsi ce théorème:

Théorème. Soient f une fonction, continue dans l'intervalle donné (a, b), ψ une autre fonction satisfaisant à une seule condition

$$\int_a^b \psi^2\, dx < Q^2,$$

Q étant un nombre assignable.

Ces conditions étant remplies, la fonction

$$\int_{a_1}^{x} f\psi\, dx, \quad a_1 \leqq x < b, \quad a \leqq x \leqq b$$

peut se développer en série uniformément convergente de la forme suivante

$$\int_{a_1}^{x} f\psi\, dx = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_\varkappa \int_{a_1}^{x} \varphi_\varkappa \psi\, dx, \quad A_\varkappa = \int_a^b p f \varphi_\varkappa\, dx,$$

$\varphi_\varkappa\,(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$ *étant les polynomes de Tchébicheff correspondant à la fonction $p\,(x)$.*

En posant

$$a_1 = a, \quad x = b, \quad \psi = p\,\varphi,$$

on trouve le développement suivant

$$\int_a^b p f \varphi\, dx = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_\varkappa B_\varkappa, \quad B_\varkappa = \int_a^b p\,\varphi\,\varphi_\varkappa\, dx.$$

La série

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_\varkappa B_\varkappa$$

converge absolument, ce qui résulte immédiatement de ce que

$$|A_\varkappa B_\varkappa| < \frac{1}{2}(A_\varkappa^2 + B_\varkappa^2)$$

et que les séries

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} A_\varkappa^2 \text{ et } \sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_\varkappa^2$$

convergent, d'après le théorème du n° 3.

5. Supposons maintenant que, la fonction f étant choisie convenablement, la série

$$\sum_{x=0}^{\infty} A_x \varphi_x$$

converge uniformément dans l'intervalle (a_1, b_1), a_1 et b_1 étant des nombres satisfaisant aux conditions

$$a \leqq a_1 < b_1 \leqq b.$$

Dans ce cas R_p dans l'équation

$$f = \sum_{x=0}^{x=p} A_x \varphi_x + R_p$$

reste continue dans l'intervalle (a_1, b_1), quel que soit l'indice p, de sorte que

$$R = \lim_{p=\infty} R_p$$

est une fonction continue entre les limites a_1 et b_1.

Le théorème du n° 3 donne [l'égalité (26.)]

$$\lim_{p=\infty} \int_a^b p(x) R_p^2 \, dx = 0.$$

Mais

$$\int_{a_1}^{b_1} p(x) R_p^2 \, dx < \int_a^b p(x) R_p^2 \, dx,$$

quel que soit le nombre entier p.

On a donc *a fortiori*

$$\lim_{p=\infty} \int_{a_1}^{b_1} p(x) R_p^2 \, dx = 0,$$

d'où, en remarquant que $\lim_{p=\infty} R_p$ reste *continue* dans l'intervalle (a_1, b_1), on tire

$$\lim_{p=\infty} \int_{a_1}^{b_1} p(x) R_p \, dx = \int_{a_1}^{b_1} p(x) R \, dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$R = 0$$

pour toutes les valeurs de x, comprises entre les limites a_1 et b_1.

On a donc

$$f = \sum_{x=0}^{\infty} A_x \varphi_x.$$

Le théorème suivant est donc démontré:

***Théorème.** Toute fonction f, continue dans l'intervalle donné (a, b), se développe en série, procédant suivant les polynomes de Tchébicheff, dans tout intervalle (a_1, b_1), situé à l'intérieur de l'intervalle donné (a, b), si cette série converge uniformément dans l'intervalle (a_1, b_1).*

Ce développement a la forme suivante

$$f = \sum_{x=0}^{\infty} A_x \varphi_x, \quad A_x = \int_a^b p(x) f \varphi_x \, dx,$$

φ_x $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ *étant les polynomes de Tchébicheff correspondant à la fonction caractéristique* $p(x)$.

II.

6. Appliquons maintenant ces théorèmes généraux au cas particulier des polynomes de *Tchébicheff* correspondant à la fonction caractéristique

$$p = C(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0),$$

en supposant, pour plus de simplicité,

$$C = 1, \ a = -1, \ b = +1.$$

Dans ce cas, comme nous l'avons déjà dit, les polynomes de *Tchébicheff* coïncident avec ceux de *Jacobi* que nous désignerons par

$$T_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

On peut les définir par l'équation suivante

$$(1.) \qquad \int_{-1}^{+1} p\, T_n P_{n-1} \, dx = 0,$$

P_{n-1} désignant une fonction entière arbitraire de degré $\leqq n-1$.

Nous supposons que le coefficient de x^n dans l'expression T_n soit égal à l'unité.

Posons

$$V_n = C_n T_n,$$

C_n étant une constante arbitraire.

La fonction V_n satisfait évidemment à l'équation (1.) et à l'équation différentielle de la forme suivante

$$(2.) \quad (1-x^2) V_n'' + [\alpha - \beta - (\alpha+\beta)x] V_n' + n(n-1+\alpha+\beta) V_n = 0.$$

Nous désignons, en général, par F' et F'' les dérivées du premier et du second ordre de la fonction F.

Déterminons C_n par l'équation

$$(3.)\qquad \int_{-1}^{+1} p V_n^2 dx = 1.$$

On trouve

$$(4.)\qquad C_n^2 = \frac{(\alpha+\beta+n-1)\cdots(\alpha+\beta+2n-2)\,\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{2^{\alpha+\beta+2n-1}\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}.$$

Les polynomes V_n et V_m satisfont à la condition

$$(5.)\qquad \int_{-1}^{+1} p V_n V_m dx = 0,$$

pourvu que $n \lesseqgtr m$.

La fonction V_n a pour les limites de l'intervalle $(-1, +1)$ les valeurs suivantes:

$$(6.)\qquad V_n(+1) = C_n\cdot 2^n \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\cdots(\alpha+\beta+2n-2)},$$

$$(7.)\qquad V_n(-1) = C_n(-1)^n\cdot 2^n \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(\alpha+\beta+n-1)\cdots(\alpha+\beta+2n-2)}.\text{*)}$$

Ces formules nous seront nécessaires dans ce qui va suivre.

7. Supposons d'abord que

$$\alpha > 1, \quad \beta > 1.$$

Désignons, avec M. *Possé*,**) par $T_n^{(1)}$ la fonction qu'on obtient en remplaçant dans l'équation [n^0 6, l'équation (1.)]

$$\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} T_n P_{n-1} dx = 0$$

α et β par $\alpha+1$, $\beta+1$.

On sait que

$$(8.)\qquad \frac{dT_n}{dx} = n\, T_{n-1}^{(1)}.$$

Désignons par $C_{n-1}^{(1)}$ la constante, définie par l'équation

$$[C_{n-1}^{(1)}]^2 \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta} (T_{n-1}^{(1)})^2 dx = 1.$$

---

*) Voir, par exemple, *Possé*: „Sur quelques applications des fractions continues algébriques". p. 48 etc. St.-Pétersbourg, 1886.

**) *K. Possé*, mém. cité, p. 49.

On trouve

$$V_n = C_n T_n, \quad V_{n-1}^{(1)} = C_{n-1}^{(1)} T_{n-1}^{(1)},$$

et l'équation (8.) donne

$$\frac{dV_n}{dx} = n \frac{C_n}{C_{n-1}^{(1)}} V_{n-1}^{(1)},$$

ou, en vertu de (4.),

$$\text{(9.)} \qquad \frac{dV_n}{dx} = \sqrt{\varkappa_n}\, V_{n-1}^{(1)}.$$

De cette équation on tire

$$\text{(10.)} \qquad \frac{d^2 V_n}{dx^2} = \sqrt{\varkappa_n}\, \frac{dV_{n-1}^{(1)}}{dx}, \quad \varkappa_n = n(\alpha+\beta+n-1).$$

Substituant ces expressions de V_n' et V_n'' dans (2.), on obtient l'équation suivante

$$\text{(11.)} \qquad (1-x^2)\frac{dV_{n-1}^{(1)}}{dx} + [\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x]\, V_{n-1}^{(1)} + \sqrt{\varkappa_n}\, V_n = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation de *Bernoulli*

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} + [\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x]\,y + \sqrt{\varkappa_n}\, V_n = 0$$

se représente sous la forme suivante

$$y = \frac{C - \sqrt{\varkappa_n} \int_{-1}^{x} (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, V_n\, dx}{(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}}.$$

Nous obtiendrons le polynome $V_{n-1}^{(1)}$, en choisissant convenablement la constante C.

Il est aisé de voir que C doit être égal à zéro.

En effet, la fonction

$$\frac{\int_{-1}^{x} p\, V_n\, dx}{p(1-x)^2}, \quad p = (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

reste continue dans l'intervalle de $x = -1$ à $x = +1$ et pour les limites mêmes; il en est de même du polynome $V_{n-1}^{(1)}$, ce qui est évidemment possible sous la seule supposition que

$$C = 0.$$

On trouve donc

$$V_{n-1}^{(1)} = -\sqrt{\varkappa_n}\,\frac{\int_{-1}^{x} p\, V_n\, dx}{p(1-x^2)}.$$

Soient a_1 et b_1 deux nombres quelconques satisfaisant aux conditions

$$-1 < a_1 < b_1 < +1.$$

Considérons les valeurs de $V_{n-1}^{(1)}$ pour les valeurs de x, comprises dans l'intervalle (a_1, b_1).

On a

$$|V_{n-1}^{(1)}| < \sqrt{\varkappa_n}\,\frac{\left(\int_{-1}^{x} p\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-1}^{x} p\, V_n^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}}{p(1-x^2)} < \sqrt{\varkappa_n}\, U,$$

où l'on a posé

$$U = \frac{\left(\int_{-1}^{x} p\, dx\right)^{\frac{1}{2}}}{p(1-x^2)}.$$

Cette fonction U reste continue dans l'intervalle (a_1, b_1).

On peut donc assigner la limite supérieure du module de cette fonction dans l'intervalle considéré.

Cette limite ne dépend, évidemment, que de p et des nombres a_1 et b_1. En le désignant par A on trouve

$$(12.)\qquad |V_{n-1}^{(1)}| < A\sqrt{\varkappa_n}$$

pour toutes les valeurs de x, comprises entre les limites a_1 et b_1. Cette inégalité a lieu pour tous les polynomes de *Jacobi*, au moins pour les polynomes dont les paramètres α et β sont plus grands que l'unité.

On peut donc écrire, en général,

$$(13.)\qquad |V_n| < A\sqrt{\varkappa_{n+1}} = A\sqrt{(n+1)(\alpha+\beta+n)}.$$

$$\alpha > 1,\ \beta > 1.$$

8. Cela posé, considérons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, V_n.$$

Supposons que f admette les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle $(-1, +1)$.

On trouve, en tenant compte de (2.),

$$A_n = \int_{-1}^{+1} p f V_n dx = -\frac{1}{x_n}\Big[\int_{-1}^{+1} p f \{(1-x^2) V_n'' + [\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x] V_n'\} dx\Big].$$

Or

$$\int_{-1}^{+1} p f (1-x^2) V_n'' dx = -\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx}[p f (1-x^2)] V_n' dx,$$

d'où, en remarquant que

$$p[\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x] = \frac{d}{dx}[p(1-x^2)],$$

on tire

$$(14.) \qquad A_n = -\frac{1}{x_n}\int_{-1}^{+1} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta f' V_n' dx.$$

La nouvelle intégration par parties donne finalement

$$(15.) \begin{cases} A_n = \frac{1}{x_n}\int_{-1}^{+1} (1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\{(\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x)f' + (1-x^2)f''\} V_n dx \\ \qquad = \frac{1}{x_n}\int_{-1}^{+1} p\psi V_n dx, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\psi = [\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x]f' + (1-x^2)f''.$$

On a donc

$$(15.) \qquad A_n V_n = \frac{V_n}{x_n}\int_{-1}^{+1} p\psi V_n dx = \frac{V_n}{x_n} B_n.$$

De cette égalité on tire

$$|A_n V_n| < \frac{1}{2}\Big(\frac{V_n^2}{x_n^2} + B_n^2\Big),$$

ou, en vertu de (13.),

$$|A_n V_n| < \frac{A^2}{2}\frac{(n+1)(\alpha+\beta+n)}{n(\alpha+\beta+n-1)}\frac{1}{x_n} + \frac{1}{2}B_n^2.$$

Il est évident que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(\alpha+\beta+n)}{n(\alpha+\beta+n-1)}\frac{1}{x_n}$$

converge.

La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^2$$

converge, d'après le théorème du n° 3.

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n \tag{16.}$$

converge dans l'intervalle (a_1, b_1).

On peut dire que la série (16.) converge uniformément à l'interieur de l'intervalle donné $(-1, +1)$, car a_1 et b_1 satisfont à une seule condition

$$-1 < a_1 < b_1 < +1.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante: ***Toute fonction continue et admettant les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle*** $(-1, +1)$ ***se développe en série uniformément convergente procédant suivant les polynomes de Jacobi, si les paramètres*** α ***et*** β ***de ces polynomes sont plus grands que l'unité.***

9. Supposons maintenant que

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1. \tag{17.}$$

Désignons par $V_n^{(2)}$ la fonction qu'on obtient en remplaçant dans l'équation (1.) α et β par $\alpha+2$ et $\beta+2$.

Par V_n nous désignerons maintenant la fonction correspondant aux paramètres α et β satisfaisant aux conditions (17.).

On a, en tenant compte de (9.),

$$\frac{dV_{n-1}^{(1)}}{dx} = \sqrt{\varkappa_{n-1}^{(1)}}\, V_{n-2}^{(2)}, \qquad \varkappa_{n-1}^{(1)} = (n-1)(\alpha+\beta+n).$$

Substituant cette dernière expression dans (11.), il viendra

$$V_n = -\frac{1}{\sqrt{\varkappa_n}} \{(1-x^2)\sqrt{\varkappa_{n-1}^{(1)}}\, V_{n-2}^{(2)} + [\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x]\, V_{n-1}^{(1)}\}.$$

On peut donc écrire, en tenant compte de (15.),

$$-A_n V_n = \frac{B_n}{\varkappa_n}\left\{(1-x^2)\, V_{n-1}^{(2)} \frac{\sqrt{\varkappa_{n-1}^{(1)}}}{\sqrt{\varkappa_n}} + \frac{\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x}{\sqrt{\varkappa_n}}\, V_{n-1}^{(1)}\right\}.$$

Posons

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{m_n}{x_n} B_n V_{n-2}^{(2)}, \quad S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x_n \sqrt{x_n}} B_n V_{n-1}^{(1)},$$

$$m_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^{(1)}}}{\sqrt{x_n}};$$

il viendra

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n V_n = -(1-x^2) S_1 - [\alpha - \beta - (\alpha+\beta) x] S_2.$$

Il s'ensuit que la série

$$(18.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n$$

converge, pourvu qu'il en soit de même des séries S_1 et S_2.

Il est évident que les quantités m_n $(n = 2, 3, \ldots)$ ne surpassent pas une certaine limite B.

La série S_1 converge, par conséquent, en même temps que la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{V_{n-2}^{(2)}}{x_n} B_n.$$

Or, chacun des paramètres des polynomes $V_{n-2}^{(2)}$ est plus grand que l'unité. On trouve donc, en tenant compte de (12.)

$$(19.) \qquad |V_{n-2}^{(2)}| < A \sqrt{x_{n-1}^{(1)}}.$$

D'autre part:

$$2 \left| \frac{V_{n-2}^{(2)}}{x_n} B_n \right| < \frac{(V_{n-2}^{(2)})^2}{x_n^2} + B_n^2.$$

La série ΣB_n^2 converge, d'après le théorème du n° 3.

Quant à la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(V_{n-2}^{(2)})^2}{x_n^2},$$

sa convergence résulte de ce que, en vertu de (19.),

$$\frac{(V_{n-2}^{(2)})^2}{x_n^2} < A^2 m_n^2 \frac{1}{x_n}$$

et que la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} m_n^2 \frac{1}{x_n}$$

converge.

Il en résulte que la série S_1 converge et cela uniformément (et absolument) dans tout intervalle (a_1, b_1), intérieur à l'intervalle $(-1, +1)$.

La convergence uniforme de la série S_2, entre les limites a_1 et b_1, se démontre de la même manière.

On conclut de ce qui précède que ***la série*** (18.) ***converge uniformément à l'intérieur de l'intervalle*** $(-1, +1)$ ***même dans le cas, où chacun des paramètres*** α ***et*** β ***des polynomes de Jacobi est plus petit que l'unité.***

Ce résultat ainsi que la proposition, établie dans le n° 8, nous permettent d'énoncer ce théorème général:

Théorème. Toute fonction, continue et admettant les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle $(-1, +1)$, ***se développe à l'intérieur de cet intervalle en série uniformément et absolument convergente, procédant suivant les polynomes de Jacobi, quels que soient les paramètres*** α ***et*** β ***de ces polynomes.***

Le développement a la forme suivante

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n, \quad A_n = \int_{-1}^{+1} (1+x)^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} f V_n \, dx.$$

III.

10. En terminant mes recherches j'indiquerai encore un théorème utile dans quelques applications.

Désignons par U la fonction suivante

$$U = \int^x \frac{dx}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta}.$$

Cette fonction reste continue dans l'intervalle de $x = -1$ à $x = +1$, elle reste aussi continue pour les limites de cet intervalle, si

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1,$$

et devient infinie pour $x = -1$ et $x = +1$, si

$$\alpha \geqq 1, \quad \beta \geqq 1.$$

Il est évident que l'expression

$$A_n U + B_n,$$

A_n, B_n étant des constantes arbitraires, représente l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(1-x^2) y'' + [\alpha - \beta - (\alpha+\beta) x] y' = 0.$$

En employant la méthode de variation des constantes arbitraires on peut représenter l'intégrale générale de l'équation

$$(1.)\qquad (1-x^2)y''+[\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x]y'+\varkappa_n V_n=0\text{*)}$$

sous la forme suivante

$$y=U\Big(a_n-\varkappa_n\int_{-1}^{x}pV_n\,dx\Big)+b_n+\varkappa_n\int_{-1}^{x}pUV_n\,dx.$$

Choisissant convenablement a_n et b_n nous obtiendrons la fonction V_n représentant une solution particulière de l'équation (1.).

Il est aisé de s'assurer que dans ce dernier cas

$$a_n=0,\quad b_n=V_n(+1)-\varkappa_n\int_{-1}^{+1}pUV_n\,dx,$$

quels que soient les paramètres α et β.

Si

$$\alpha>1,\quad \beta>1,$$

on trouve

$$V_n(+1)=b_n+\varkappa_n\int_{-1}^{+1}pUV_n\,dx,$$

et, en vertu de (1.) de la Section précédente,

$$a_n=\varkappa_n\int_{-1}^{+1}pV_n\,dx=0,$$

ce qui résulte immédiatement de ce que U devient infini pour $x=+1$, tandis que $V_n(+1)$ a une valeur bien déterminée.

Si

$$\alpha<1,\quad \beta<1,$$

on trouve

$$a_n=\frac{V_n(+1)-V_n(-1)-\varkappa_n\int_{-1}^{+1}pUV_n\,dx}{U(+1)-U(-1)},$$

$$b_n=V_n(+1)-\varkappa_n\int_{-1}^{+1}pUV_n\,dx$$
$$+\frac{U(+1)}{U(+1)-U(-1)}\Big[V_n(+1)-V_n(-1)-\varkappa_n\int_{-1}^{+1}pUV_n\,dx\Big].$$

*) Rappelons que

$$\varkappa_n=n(\alpha+\beta+n-1).$$

Il est aisé de démontrer que

$$(2.)\qquad V_n(+1) - V_n(-1) - \varkappa_n \int_{-1}^{+1} p\,U\,V_n\,dx = 0.$$

En effet, l'équation

$$(1-x^2)\,V_n'' + [\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x]\,V_n' + \varkappa_n\,V_n = 0$$

donne

$$-\varkappa_n \int_{-1}^{+1} p\,U\,V_n\,dx = \int_{-1}^{+1} p\,U[(1-x^2)\,V_n'' + [\alpha-\beta-(\alpha+\beta)x]\,V_n']\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} p\,U \frac{d}{dx}[(1+x)^\alpha (1-x)^\beta\,V_n']\,dx,$$

d'où, en intégrant par parties,

$$-\varkappa_n \int_{-1}^{+1} p\,U\,V_n\,dx = U(1-x)^\alpha (1-x)^\beta\,V_n' \Big|_{x=-1}^{x=+1} - \int_{-1}^{+1} V_n'\,dx$$

$$= V_n(-1) - V_n(+1),$$

puisque

$$U\,(1+x)^\alpha\,(1-x)^\beta\,V_n' \Big|_{x=-1}^{x=+1} = 0.$$

On a donc dans tous les cas

$$a_n = 0,\ b_n = V_n(+1) - \varkappa_n \int_{-1}^{+1} p\,U\,V_n\,dx,$$

et enfin

$$(3.)\quad V_n = V_n(+1) + \varkappa_n \Big[\int_{-1}^{x} p\,U\,V_n\,dx - U\int_{-1}^{x} p\,V_n\,dx - \int_{-1}^{+1} p\,U\,V_n\,dx\Big],$$

ou, en vertu de (2.),

$$(4.)\qquad V_n = V_n(-1) + \varkappa_n \Big[\int_{-1}^{x} p\,U\,V_n\,dx - U\int_{-1}^{x} p\,V_n\,dx\Big].$$

11. Supposant que f admette les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle $(-1,+1)$ et tenant compte de l'équation (4.) on peut écrire

$$A_n\,V_n = A_n\,V_n(-1) + \int_{-1}^{+1} p\,\psi\,V_n\,dx \Big[\int_{-1}^{x} p\,U\,V_n\,dx - U\int_{-1}^{x} p\,V_n\,dx\Big],$$

puisque dans le cas considéré

$$A_n = \frac{1}{\varkappa_n} \int_{-1}^{+1} p\,\psi\, V_n\, dx$$

[l'équation (15.) de la Section II].

Posons

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n(-1), \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} p\,\psi\, V_n\, dx \cdot \int_{-1}^{x} p\, U\, V_n\, dx,$$

$$S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} p\,\psi\, V_n\, dx \cdot \int_{-1}^{+1} p\, V_n\, dx.$$

Il est aisé de s'assurer que la fonction

$$p\, U = (1+x)^{\alpha} (1-x)^{\beta} \int \frac{dx}{(1+x)^{\alpha} (1-x)^{\beta}}$$

reste continue entre les limites -1 et $+1$ ainsi que pour les limites mêmes.

Il existe donc un nombre Q fini et positif tel qu'on ait

$$\int_{-1}^{+1} p^2\, U^2 dx < Q^2.$$

Cette condition étant remplie, ***la série S converge uniformément dans l'intervalle*** $(-1, +1)$, ***d'après le théorème général du n° 4 de la Section I.***

Il en est de même de la série S_2.

D'autre part, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n = S_1 + S_2 - U S_3.$$

Il s'ensuit que ***la série***

$$(5.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n$$

converge et cela uniformément, si la série

$$(6.) \qquad S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n(-1)$$

converge.

Nous pouvons aussi démontrer de la même manière que ***la série*** (5.) ***converge uniformément dans l'intervalle donné*** $(-1, +1)$, ***si la série***

$$(6_1.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n(+1)$$

converge.

La démonstration restera la même, il faut seulement prendre pour V_n l'expression (3.) [au lieu de (4.)].

Théorème. *La série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n, \qquad A_n = \int_{-1}^{+1} pf V_n \, dx$$

converge uniformément dans l'intervalle de $x = -1$ à $x = +1$, si elle converge pour l'une des limites de cet intervalle)*.

12. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$V_n(+1) = U_n$$

et considérons le rapport

$$\frac{U_n^2}{U_{n+1}^2}.$$

On trouve, en tenant compte de l'équation (6.) de la Section précédente,

$$\frac{U_{n+1}^2}{U_n^2} = 4\frac{C_{n+1}^2}{C_n^2}\frac{(\alpha+\beta+n-1)^2(\beta+n)^2}{(\alpha+\beta+2n-1)^2(\alpha+\beta+2n)^2}.$$

D'autre part, l'équation (4.) de la Section II donne

$$4\frac{C_{n+1}^2}{C_n^2} = \frac{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n)^2}{(n+1)(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+n-1)}.$$

On a donc

$$(7.) \qquad \frac{U_n^2}{U_{n+1}^2} = \frac{(\alpha+n)(n+1)(\alpha+\beta+2n-1)}{(\beta+n)(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n+1)}.$$

Formons maintenant la suite des quantités positives

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

en posant

$$v_n = \frac{U_n^2}{x_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Considérons la différence

$$K_n = \frac{v_n}{v_{n+1}} - 1$$

qui, en vertu de (7.), se représente sous la forme

$$K_n = \frac{(\alpha+n)(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+n)(n+1)^2}{(\beta+n)(\alpha+\beta+n-1)^2(\alpha+\beta+2n+1)n} - 1.$$

*) Il est aisé de démontrer aussi que si cette série est convergente pour l'une des limites, elle le sera également pour l'autre, et cela sous la seule condition que f admette la dérivée du premier ordre.

Posons

$$\alpha+\beta = x$$

et formons la fonction

$$f(x) = (n+x-\beta)(x+2n-1)(x+n)(n+1)^2 - n(n+\beta)(x+n-1)^2(x+2n+1).$$

Il est aisé de voir que l'inégalité

$$f(x) > 0$$

entraîne l'inégalité

$$K_n > 0.$$

Formons la dérivée

$$f'(x) = (n+1)^2\{(x+n)[2x+3n-(1+\beta)]+(n+x-\beta)(x+2n-1)\}$$
$$-n(n+\beta)(x+n-1)(3x+5n+1).$$

On a, pour $x = 0$,

$$f(0) = 2n[n^2(3-2\beta)-1],$$
$$f'(0) = 4n^3(3-2\beta)+n^2(2-\beta)-2n+\beta.$$

On voit que

$$f(0) > 0, \qquad f'(0) > 0,$$

pourvu que

$$\beta < \frac{3}{2},$$

pour toutes les valeurs de l'indice n plus grandes que

$$(8.) \qquad m_1 = E\left(\frac{1}{\sqrt{3-2\beta}}\right)+1.^{*})$$

Posant, en effet.

$$n = \frac{1}{\sqrt{3-2\beta}}+z,$$

on trouve

$$f(0) = 2nz\sqrt{3-2\beta}(2z+1),$$
$$f'(0) = \frac{2}{\sqrt{3-2\beta}}+10z+4z^2(3-2\beta)\left(\frac{3}{\sqrt{3-2\beta}}+z\right)+(2-\beta)n^2+\beta,$$

*) Le signe E désigne le plus grand nombre entier, compris dans $\frac{1}{\sqrt{3-2\beta}}$.

d'où l'on voit que $f(0)$ et $f'(0)$ sont positifs pour toutes les valeurs positives de s $\left(\beta<\frac{3}{2}\right)$.

On en conclut que $f(0)$ et $f'(0)$ restent positifs pour toutes les valeurs de n plus grandes que m_1 [l'égalité (8.)].

Formons enfin la dérivée du second ordre $f''(x)$.

On trouve

$$f''(x)=6x[n(2-\beta)+1]+2[n^2(8-5\beta)+(2-\beta)n-(1+\beta)],$$

d'où l'on voit que $f''(x)$ reste positif pour toutes les valeurs positives de x et pour toutes les valeurs de n plus grandes que

$$m_2=E(q)+1,$$

q désignant la racine positive de l'équation

$$n^2(8-5\beta)+n(2-\beta)-(1+\beta)=0.$$

Il s'ensuit que $f'(x)$ est une fonction croissante de x; elle reste donc positive pour toutes les valeurs positives de x et pour toutes les valeurs de n plus grandes que m, m désignant le plus grand des deux nombres m_1 et m_2.

On en conclut que $f(x)$ *reste aussi positif pour toutes les valeurs positives de x et pour $n>m$, pourvu que*

$$\beta<\frac{3}{2}.$$

On peut donc dire que, à partir d'un certaine nombre $n>m$, on a toujours

$$(9.)\qquad K_n>0$$

sous la seule condition:

$$\beta<\frac{3}{2},$$

puisque, d'après la supposition,

$$\alpha>0,\quad \beta>0.$$

L'inégalité (9.) montre que

$$v_{n+1}<v_n$$

pour $n>m$.

Les quantités

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

forment donc une suite de quantités non croissantes.

13. Reprenons maintenant la série $(6_1.)$, qu'on peut représenter, en tenant compte de (15.) de la Section précédente, sous la forme suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{x_n} B_n.$$

On a

$$\left|\frac{U_n}{x_n} B_n\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{U_n^2}{x_n}\frac{1}{x_n} + B_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{x_n} + B_n^2\right).$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2$ converge, d'après le théorème général du n° 3; la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{x_n}$$

converge, d'après le théorème connu d'*Abel.*

Il s'ensuit que la série $(6_1.)$ converge, d'où l'on conclut, en tenant compte du théorème du n° 11, que *la série*

$$(10.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n, \quad A_n = \int_{-1}^{+1} p f V_n dx$$

converge uniformément dans l'intervalle $(-1, +1)$, *si les paramètres* α *et* β *des polynomes* V_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *satisfont à la condition*

$$\beta < \frac{3}{2},$$

α *est un nombre positif arbitraire.*

Nous pouvons aussi démontrer de la même manière que *la série* (10.) *converge uniformément dans l'intervalle* $(-1, +1)$, *si les paramètres* α *et* β *satisfont à la condition suivante*

$$\alpha < \frac{3}{2},$$

β *est un nombre positif arbitraire.*

La simple comparaison de ces propositions avec le théorème du *n*° 4 nous amène au théorème suivant:

Théorème. Toute fonction arbitraire, continue et admettant les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle $(-1, +1)$, *se développe en série uniformément convergente, procédant suivant les polynomes de Jacobi, pourvu que les paramètres* α *et* β *de ces polynomes satisfont à l'une des deux conditions suivantes:*

1) $$\beta < \frac{3}{2},$$

α est un nombre positif arbitraire;

2) $$\alpha < \frac{3}{2},$$

β est un nombre positif arbitraire.

C'est un théorème analogue à celui du n° 9; mais dans le cas (nous venons d'étudier, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n$$

converge non seulement à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, mais enc pour les limites de cet intervalle.

Dans le cas

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1$$

les polynomes V_n se réduisent aux fonctions de *Legendre*.

Les conditions 1) ou 2) sont satisfaites et *le théorème précédent montre la possibilité du développement d'une fonction donnée en série pro dant suivant les fonctions de Legendre.**)

14. Supposons maintenant que *la fonction f n'admette que la déri du premier ordre* dans l'intervalle $(-1, +1)$.

L'équation (14.) du n° 8 donne, en vertu de (9.),

$$A_n = -\frac{1}{\sqrt{x_n}} \int_{-1}^{+1} (1+x)^\alpha (1-x)^\beta f' V_{n-1}^{(1)} \, dx = \frac{B_n}{\sqrt{x_n}}.$$

On a donc

$$A_n U_n = \frac{U_n}{\sqrt{x_n}} B_n.$$

Démontrons que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{\sqrt{x_n}} B_n,$$

ou, ce qui revient au même, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n (+1)$$

converge.

*) Certainement, sous la supposition que cette fonction reste continue et adm les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Pour cela, considérons la différence

$$L_n = \frac{U_n^2}{U_{n+1}^2} - 1.$$

Posons, comme dans le n⁰ précédent,

$$\alpha + \beta = x.$$

La condition

$$L_n > 0$$

se réduira [en vertu de (7.)] à la suivante:

$$(n+1)(n-\beta+x)(x+2n-1)-(\beta+n)(x+n-1)(x+2n+1) > 0.$$

Considérons la fonction

$$f(x) = (n+1)(n-\beta+x)(x+2n-1)-(\beta+n)(x+n-1)(x+2n+1).$$

On a

$$f(0) = 2[n^2(1-2\beta)+\beta],$$

d'où l'on voit que

$$f(0) > 0,$$

pourvu que

$$(11.) \qquad \beta < \frac{1}{2}.$$

Formons la dérivée

$$f'(x) = 2x(1-\beta)+2n(1-2\beta)-(1+\beta).$$

La condition (10.) étant remplie, la fonction $f'(x)$ reste positive pour toutes les valeurs positives de x et pour toutes les valeurs de l'indice n plus grandes que

$$m = E\left(\frac{1+\beta}{2(1-2\beta)}\right)+1.$$

On en conclut immédiatement que $f(x)$ reste positif pour les mêmes valeurs de x et de n, puisque $f(0) > 0$.

On trouve donc

$$U_{n+1} < U_n \text{ pour } n \geqq m,$$

si $\beta < \frac{1}{2}$, quel que soit le nombre α.

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n^2}{x_n}$$

converge.

La convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2$$

est déjà démontrée dans le n° 13.

Il en résulte que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n(+1)$$

converge absolument puisque

$$2|A_n V_n(+1)| < \frac{U_n^2}{\varkappa_n} + B_n^2.$$

On obtient ainsi la proposition suivante:

La série

$$(11.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n$$

converge absolument, pourvu que la fonction continue f admette la dérivée du premier ordre et les paramètres α et β des polynomes V_n satisfassent à la condition

$$\beta < \frac{1}{2},$$

α est un nombre positif arbitraire.

Il est aisé de démontrer aussi que *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n(-1)$ *converge, pourvu que le paramètre* $\alpha < \frac{1}{2}$, *β étant quelconque.*

Cette proposition, combinée avec le théorème du n° 11, nous amène à ce théorème:

Théorème. Toute fonction f, continue et admettant les dérivées des deux premiers ordres dans l'intervalle $(-1, +1)$, *se développe dans cet intervalle en série uniformément convergente, procédant suivant les polynomes de Jacobi, si les paramètres α et β de ces polynomes satisfont à une des deux conditions suivantes*

$$1) \qquad \beta < \frac{1}{2},$$

α est un nombre positif arbitraire;

$$2) \qquad \alpha < \frac{1}{2},$$

β est un nombre positif arbitraire. Dans ce cas la série converge non seulement à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, mais encore pour ses limites, et cela sous la seule condition que f admette la dérivée du premier ordre.

15. Remarquons enfin qu'on peut déduire ce théorème de la proposition que les quantités

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

forment une suite de quantités non croissantes, si α et β satisfont à une des deux conditions

$$1) \qquad \beta < \frac{3}{2}, \quad \alpha > 0,$$

$$2) \qquad \alpha < \frac{3}{2}, \quad \beta > 0.$$

(voir n° 11).

Supposons d'abord

$$\beta < \frac{1}{2}$$

et considérons les polynomes V_n et $V_{n-1}^{(1)}$.

Le paramètre $\beta_1 = \beta + 1$ du polynome $V_{n-1}^{(1)}$ satisfait évidemment à l'inégalité

$$\beta_1 < \frac{3}{2}.$$

On a donc, pour n assez grand,

$$(12.) \qquad \frac{[V_{n-1}^{(1)}(+1)]^2}{x_n} < Q,^{*})$$

Q étant un nombre assignable.

Reprenons maintenant l'équation (14.) de la Section précédente.

On trouve, en vertu de (9.),

$$A_n = -\frac{1}{\sqrt{x_n}} B_n.$$

---

*) Puisque

$$\frac{[V_{n-1}^{(1)}(+1)]^2}{x_n} = \frac{[V_{n-1}^{(1)}(+1)]^2}{x_{n-1}^{(1)}} \frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n}$$

et les nombres $\frac{x_{n-1}^{(1)}}{x_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ne surpassent pas une certaine limite.

D'autre part, l'égalité

$$V_{n-1}^{(1)} = -\sqrt{\varkappa_n} \frac{\int_{-1}^{x} p\, V_n\, dx}{p\,(1-x^2)}$$

(voir n⁰ 7) donne

$$V_{n-1}^{(1)}(+1) = -\sqrt{\varkappa_n} \frac{V_n(+1)}{2\beta}.$$

On trouve donc

$$A_n V_n(+1) = 2\beta \frac{V_{n-1}^{(1)}(+1)}{\varkappa_n} B_n;$$

d'où

$$|A_n V_n(+1)| < \beta\left(\frac{[V_{n-1}^{(1)}(+1)]^2}{\varkappa_n} \frac{1}{\varkappa_n} + B_n^2\right).$$

La série

$$\frac{[V_{n-1}^{(1)}(+1)]^2}{\varkappa_n} \frac{1}{\varkappa_n}$$

converge, en vertu de (12.); il en est de même de la série ΣB_n^2.

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n V_n(+1)$$

converge, pourvu que

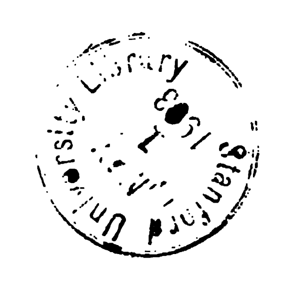
$$\beta < \frac{1}{2}.$$

Cela suffit pour établir le théorème du numéro précédent.

Band 125. Heft III.

Inhaltsverzeichniss.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:
An die Redaction des Journals für die reine und angewandte **Mathematik**, Professor Dr. Kurt Hensel. Marburg a./L., Universitätsstrasse 54.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

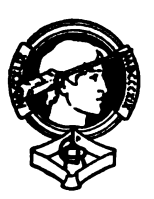
K. Hensel.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 125.

Heft IV.

Ausgegeben den 7. April.



Berlin,

W. 35 Lützowstrasse 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1903.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Ein Brief von *Niels Henrik Abel* an *Edmund Jacob Külp* *).

Paris, le 1 Novembre 1826

In einem Brief, den ich von Herrn Geheimrath *Crelle* empfangen habe schreibt er mir dass Sie von Ihm Erläuterung einiger Stellen in meinen Abhandlungen verlangt haben. Der Herr Geheimrath bittet mich ihnen diese Erläuterungen zu geben. Das thue ich mit grösstem Vergnügen und danke ihnen dass Sie mich auf das aufmerksam gemacht haben was in meinen Abhandlungen weniger deutlich ist. —

Die erste Schwierigkeit [die] Sie gefunden haben rührt von einem Druckfehler her: Seite 75**) L. 6 von unten steht:

„Es sei z. B.

$$v\left(\frac{A_1}{A_m}\right)^r = v\left(\frac{A_1}{A_m}\right)^{r'} \qquad (1)$$

*) Den nachfolgenden bisher unbekannteu Brief *Abels* veröffentlichen wir mit gütiger Erlaubniss seines Besitzers, des Herren Professor Dr. *J. Schneider* in Darmstadt. *Abel* erwähnt diesen Brief in einem Schreiben vom 24. Oktober 1826 an *Holmboe* (*N. H. Abel*, Mémorial publié à l'occasion du centénaire de sa naissance. Correspondance d'*Abel*, lettre XVIII p. 46). In Folge einer Anregung der Herren *C. Störmer* und *F. Engel* haben die Herren *Scheffers* und *Dingeldey* in Darmstadt diesen Brief gesucht und gefunden. Obwohl das Schreiben nur Erläuterungen zu dem Unmöglichkeitsbeweise *Abels* (dieses Journal Bd. 1, S. 65—84) und einen nothwendigen Zusatz zu seiner kleinen Abhandlung „Auflösung einer mechanischen Aufgabe" (ebenda S. 153 – 157) enthält, veröffentlichen wir dasselbe in seiner ganzen Ausdehnung und wortgetreu nach dem Originale, als eine Erinnerung an einen der ersten und einen der grössten Mitarbeiter des *Crelle*schen Journales. *Der Herausgeber.*

**) Dieser Druckfehler ist in Bd. I, S. 77 der Gesammtausgabe von *Abels* Werken von *L. Sylow* und *S. Lie* bereits berichtigt.

„so folgt daraus:

$$v\binom{A_1}{A_m}^{r} = v\binom{A_1}{A_m}^{r'+p-r}$$

Es soll heissen:

so folgt daraus:

$$v\binom{A_1}{A_m}^{p} = v\binom{A_1}{A_m}^{r'+p-r} \tag{2}$$

Wenn man nämlich den beiden Seiten der Gleichung (1) die durch $\binom{A_1}{A_m}^{p-r}$ ausgedrückte Verwandlung unterwirft so erhält man

$$v\binom{A_1}{A_m}^{r+p-r} = v\binom{A_1}{A_m}^{r'+p-r}$$

dass heisst die Gleichung (2)

p. 75 u. 76 ist bewiesen dass eine Function v die eine Anzahl Werte hat die kleiner als p ist nicht verändert wird [durch] eine beliebige wiederkehrende Verwandlung vom Grade p. Nun sind

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta & \dots & \zeta & \eta\\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \dots & \eta & \alpha\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}\beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \dots & \eta & \alpha\\ \gamma & \alpha & \beta & \delta & \dots & \zeta & \eta\end{pmatrix}$$

zwei solche wiederkehrende Verwandlungen vom Grade p wenn p die Zahl der Zeiger ist; folglich wird der Werth von v durch diese Verwandlungen nicht verändert, wenn man sie nacheinander operirt. Nun bedeuten nach der Definition diese zwei Verwandlungen auf einmal dass man erst

$$x_\alpha,\ x_\beta,\ x_\gamma,\ x_\delta,\ \dots,\ x_\zeta,\ x_\eta$$

in

$$x_\beta,\ x_\gamma,\ x_\delta,\ x_\varepsilon,\ \dots,\ x_\eta,\ x_\alpha$$

und nachher

$$x_\beta,\ x_\gamma,\ x_\delta,\ x_\varepsilon,\ \dots,\ x_\eta,\ x_\alpha$$

in

$$x_\gamma,\ x_\alpha,\ x_\beta,\ x_\delta,\ \dots,\ x_\zeta,\ x_\eta$$

verwandelt welches offenbar dasselbe ist als auf einmal

$$x_\alpha,\ x_\beta,\ x_\gamma,\ x_\delta,\ \dots,\ x_\zeta,\ x_\eta$$

in

$$x_\gamma,\ x_\alpha,\ x_\beta,\ x_\delta,\ \dots,\ x_\zeta,\ x_\eta$$

zu verwandeln

Die Grössen $x_\delta,\ \dots,\ x_\zeta,\ x_\eta$ behalten also ihren Platz und nur die drei Grössen $x_\alpha,\ x_\beta,\ x_\gamma$ werden permutirt nämlich

$$x_\alpha,\ x_\beta,\ x_\gamma$$

müssen nothwendig wenigstens zwei der Functionen ϱ_1; ϱ_2; .... ϱ_5 einen gemeinschaftlichen Factor haben. Dass heisst es müssen z. B. die zwei Gleichungen

$$z^2 - \varphi(x_1) . z + f(x) = 0 \qquad z^2 - \varphi(x_2) . z + f(x_2) = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel haben. Diese Gleichungen geben aber

$$z = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}$$

aber weil $z^2 - \varphi(x_1) . z + f(x_1) = (z - v_1)(z - v_2)$ so ist auch dieser Werth von z ein Werth von v also z. B.

$$v_1 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)} = \Theta(x_1, x_2)$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich denn die Grösse rechter Hand hat nothwendig zehn verschiedene Werthe, nämlich

$$\begin{array}{rrrr} \Theta(x_1, x_2); & \Theta(x_1, x_3); & \Theta(x_1, x_4); & \Theta(x_1, x_5) \\ & \Theta(x_2, x_3); & \Theta(x_2, x_4); & \Theta(x_2, x_5) \\ & & \Theta(x_3, x_4); & \Theta(x_3, x_5) \\ & & & \Theta(x_4, x_5) \end{array}$$

und v_1 soll nicht mehr als 5 haben. also kann μ nicht 2 seyn. etc

Der Satz p. 77 soll heissen

„Die Zahl der verschiedenen Werthe einer Function von n Grössen kann entweder gar nicht bis unter die grösste Primzahl ***die nicht grösser als n ist*** vermindert werden oder nur bis auf 2 oder 1.“

Wenn man in der Gleichung (1) pag 155 rechter Hand statt z, x setzt was offenbar erlaubt ist so hat man

$$fx = \frac{\sin . n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\partial a}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'x . \partial x}{(a-x)^n}$$

und also wenn man φ statt fx setzt

$$\varphi = \frac{\sin . n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\partial a}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{\partial \varphi}{(a-x)^n}$$

etc

Es muss bemerkt werden dass n positiv und kleiner als 1 seyn muss denn sonnst werden die Integrale unendlich.

Dem Herr ***Kulp*** Ihr ergebenster
Wohlgeboren *N. Abel.*

Zur Theorie der Differential-Invarianten.

(Von Herrn *Rudolf Rothe* in Charlottenburg.)

1.

Die Untersuchungen von *Weierstrass* über die Variationsrechnung beginnen mit der Erörterung der Bedingungen, denen eine Function $F(x, y; x', y')$ von vier Argumenten zu unterwerfen ist, damit das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, y;\ x', y')\, dt$$

einen von der Wahl der Variablen t unabhängigen Werth besitzt; dabei sind unter $x = x(t)$, $y = y(t)$ zwei Functionen des Parameters t verstanden, welche innerhalb des Integrationsintervalls $(t_1 \dots t_2)$ nebst ihren Ableitungen $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$ sich regulär verhalten. Die gesuchte Bedingung ergiebt sich bekanntlich in der Form

$$\frac{\partial F}{\partial x'} x' + \frac{\partial F}{\partial y'} y' = F,$$

d. h. es ist F in Bezug auf die Argumente x', y' eine homogene Function erster Dimension*).

Herr *Zermelo***) hat in seiner Dissertation der analogen, auf das allgemeinere Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x, x', x'', \dots, x^{(n)};\ y, y', y'', \dots, y^{(n)})\, dt$$

---

*) Vgl. z. B. *A. Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung, S. 7.

**) *Ernst Zermelo*, Untersuchungen zur Variationsrechnung, Diss. Berlin, 1894, S. 2ff. — *A. Kneser*, a. a. O. S. 196.

(unter $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ für $k = 1, \dots, n$ die k-ten Ableitungen nach t verstanden) bezüglichen Frage eine ausführliche Untersuchung gewidmet und dabei „die Frage als eine Aufgabe von selbstständigem Interesse aufgefasst, die bisher eine ausreichende Beantwortung noch nicht gefunden zu haben scheint." Nach Lösung dieser Aufgabe ergiebt sich in der Arbeit des Herrn *Zermelo* dann von selbst die Entscheidung des folgenden, mit der Variationsrechnung in keinem directen Zusammenhang stehenden Problems:

Es sei gegeben eine reguläre Function von $2(n+1)$ Argumenten:

$$\varphi(x, y;\ x', y';\ \dots;\ x^{(n)}, y^{(n)}),$$

in der die Variablen x, y von einem Parameter t abhängen und

$$x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k},\quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k} \qquad (k = 1, \dots, n)$$

gesetzt ist; man soll entscheiden, wann die gegebene Function von einer solchen Beschaffenheit ist, dass sie für jeden bestimmten Werth von x und y einen bestimmten, von der Wahl des Parameters t unabhängigen Werth besitzt.

Die Lösung dieser Aufgaben gelingt Herrn *Zermelo* mit Hülfe der elementaren Variationsrechnung selbst auf einem Wege, den man etwa folgendermassen kurz skizziren kann.

Man denke sich in die Function φ an Stelle der Variablen t eine andere ϑ durch die Gleichung

$$t = t(\vartheta)$$

eingeführt. Dann treten in der vermöge dieser Gleichung transformirten Function auch die Ableitungen

$$t' = \frac{dt}{d\vartheta},\ \dots,\ t^{(n)} = \frac{d^n t}{d\vartheta^n}$$

auf. Da nun die Function φ von der speciellen Wahl des Parameters unabhängig sein soll, so muss sie auch von den Grössen $t', \dots, t^{(n)}$ unabhängig sein. Die analytische Darstellung dieser Bedingung ergiebt dann diejenigen Gleichungen, denen eine Function φ von der angegebenen Beschaffenheit genügen muss.

Die Schlussweise des Herrn *Zermelo* gilt ohne weiteres auch für mehrere abhängige Variable $x, y, z, \dots$. Sie lässt sich aber, wie im Folgenden gezeigt werden soll, auch auf den Fall ausdehnen, in welchem die Variablen $x, y, \dots$ der Function φ von *mehreren* Parametern abhängen.

Die Erweiterung des Problems von einer auf mehrere unabhängige Variable, oder in der Sprache der Geometrie, von einer Curve auf eine

Fläche*) oder ein mehrdimensionales Gebilde scheint von einer gewissen Bedeutung für die Differential-Geometrie zu sein; denn die den Bedingungen des Problems genügenden Functionen sind im wesentlichen identisch mit den in der Geometrie eine Hauptrolle spielenden „Differential-Invarianten". Man versteht bekanntlich darunter solche Functionen, welche in jedem Punkte der Fläche einen von der speciellen Wahl der krummlinigen Coordinaten unabhängigen Werth besitzen. Das Krümmungsmass, die Richtungscosinus der Normale, die *Beltrami*schen Differentialparameter gehören hierher. Es scheint aber, dass man bisher von einem allgemeinen Kriterium nicht Gebrauch gemacht hat, welches unmittelbar und ohne die gewöhnlich nothwendige explicite Darstellung durch einfachere Invarianten (z. B. Differentialparameter) gestattet, die zu untersuchenden Functionen, welche von den cartesischen Coordinaten der Fläche und deren partiellen Derivirten nach den krummlinigen Veränderlichen auf ihr abhängen, als Invarianten in dem oben angegebenen Sinne zu erkennen.

Im Folgenden wird, zunächst mit der Beschränkung, dass in der zu untersuchenden Function keine partiellen Ableitungen von höherer als der ersten Ordnung auftreten, die Aufgabe behandelt, ein Kriterium für die Invarianteneigenschaft einer *gegebenen* Function zu finden, wobei gleich von vornherein die Untersuchung auf eine beliebige Anzahl von abhängigen und unabhängigen Variablen erstreckt wird. Sodann wird ebenfalls unter der angegebenen Beschränkung das Problem gelöst, *alle* Invarianten einer gegebenen (der ersten) Ordnung zu finden. Daran schliessen sich einige Anwendungen auf die in der Flächentheorie vorkommenden Invarianten, sowie der Beweis eines auf die Invarianten beliebig hoher Ordnung bezüglichen Satzes. Was die geometrischen Anwendungen anlangt, so ergeben sich nach der oben angedeuteten Methode zunächst unmittelbar alle von der Parameterdarstellung der Fläche unabhängigen, d. h. schlechtweg alle geometrisch durch Strecken und Winkel deutbaren Grössen. Nun werden aber in der Geometrie der Flächen vorzugsweise diejenigen speciellen unter diesen untersucht, welche auch von der Wahl des cartesischen Coordinatensystems, d. h. von der Lage der Fläche im Raume unabhängig sind. Es

---

*) Es sei hier bemerkt, dass für das eingangs angeführte Problem der Variationsrechnung bereits Herr *Kneser* l. c. S. 266, die *Weierstrass*schen Homogeneitäts-Bedingungen auf den Fall eines über ein Oberflächenstück zu erstreckenden Doppelintegrals erweitert hat.

erscheint daher von Wichtigkeit, zu bemerken, dass die allgemeine Methode auch verwendet werden kann, um in die Natur dieser speciellen Invarianten einen Einblick zu gewinnen. Hierüber sollen jedoch nur einige vorläufige Bemerkungen am Schluss dieser Arbeit angeführt werden.

2.

Definitionen. Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_r$ r von einander unabhängige Variable und

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_r), \\ x_2 = x_2(u_1, \ldots, u_r), \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ x_m = x_m(u_1, \ldots, u_r) \end{cases}$$

m Functionen derselben, von denen nicht mehr von einander functional unabhängig zu sein brauchen, als die kleinere der Zahlen m oder r angiebt, welche für einen gewissen Bereich (U) ihrer Argumente sich regulär verhalten und partielle Ableitungen bis zur n-ten Ordnung besitzen, die mit

$$\frac{\partial x_a}{\partial u_k} = x_a^{(k)};\quad \frac{\partial^2 x_a}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2}} = x_a^{(k_1, k_2)};\quad \ldots;\quad \frac{\partial^\mu x_a}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2} \ldots \partial u_{k_\mu}} = x_a^{(k_1, k_2, \ldots, k_\mu)}$$
$$(a = 1, 2, \ldots, m;\ \mu = 1, 2, \ldots, n;\ k, k_1, k_2, \ldots, k_n = 1, 2, \ldots, r)$$

bezeichnet werden sollen. Ferner seien $t_1, t_2, \ldots, t_r$ r von einander unabhängige Veränderliche von der Eigenschaft, dass durch die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} u_1 = u_1(t_1, \ldots, t_r), & t_1 = t_1(u_1, \ldots, u_r), \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ u_r = u_r(t_1, \ldots, t_r), & t_r = t_r(u_1, \ldots, u_r) \end{cases}$$

der Bereich (U) auf den Bereich (T) der Variablen $t_1, \ldots, t_r$ oder umgekehrt bezogen wird. Nach der Voraussetzung ist dann die Functionaldeterminante der Bedingung

$$\left| \frac{\partial t_i}{\partial u_k} \right| \gtrless 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

unterworfen.

Das durch die Functionen $x_1, \ldots, x_m$ definirte Gebilde (X) ist ein r-dimensionales Gebilde in einer m-fachen Mannigfaltigkeit, als dessen cartesische Coordinaten in Anlehnung an die Geometrie von drei Dimensionen $x_1, \ldots, x_m$ und als dessen krummlinige Coordinaten $u_1, \ldots, u_r$ angesehen werden können. Führt man an Stelle der unabhängigen Parameter $u_1, \ldots, u_r$

die andern $t_1, \dots, t_r$ vermittels der obigen Gleichungen (2.) in die Gleichungen (1.) ein, so mögen sich die folgenden ergeben:

$$(3.) \qquad \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1(t_1, \dots, t_r), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_r = \bar{x}_r(t_1, \dots, t_r); \end{cases}$$

sie definiren eine zweite Darstellung des Gebildes (X) durch die krummlinigen Coordinaten $t_1, \dots, t_r$. Entsprechend dem Vorhergehenden sei

$$\frac{\partial^\mu \bar{x}_a}{\partial t_{k_1} \partial t_{k_2} \dots \partial t_{k_\mu}} = \bar{x}_a^{(k_1, k_2, \dots, k_\mu)}$$

gesetzt.

Nach diesen Vorbemerkungen sei

$$J = \varphi(x_1, \dots, x_m;\ x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(r)};\ \dots;\ x_1^{(k_1, \dots, k_n)}, \dots, x_m^{(k_1, \dots, k_n)})$$

eine Function der Variabeln $x_1, \dots, x_m$ und ihrer partiellen Derivirten nach den Parametern $u_1, \dots, u_r$ bis zur n-ten Ordnung, und es werde der Kürze wegen

$$J = \varphi(x_a^{(k_1, \dots, k_\mu)})$$

gesetzt, mit dem Bemerken, dass für μ auch der Werth 0 zulässig sei, wo dann unter k_0 der Werth 0 und unter $x_a^{(0)}$ die Variable x_a selber verstanden werden soll. Es sei ferner vorausgesetzt, dass die Function φ sich nicht auf eine Constante reducirt.

Die Function φ heisst dann eine „Invariante" des Gebildes (X), wenn sie für jeden Punkt des Gebildes einen von der Darstellung desselben unabhängigen Werth J besitzt. Die Ordnung n der höchsten in ihr auftretenden partiellen Ableitung soll die „Ordnung der Invariante" heissen.

Um eine analytische Formulirung des Problems zu gewinnen, denke man sich in die Argumente der gegebenen Function φ an Stelle der Parameter $u_1, \dots, u_r$ die andern $t_1, \dots, t_r$ vermöge der Gleichungen (2.) eingeführt. Hierdurch gehen die Grössen

$$x_a \quad \text{in} \quad \bar{x}_a$$

über,

$$x_a^{(k)} \quad \text{in} \quad \bar{x}_a^{(1)} \frac{\partial t_1}{\partial u_k} + \bar{x}_a^{(2)} \frac{\partial t_2}{\partial u_k} + \dots + \bar{x}_a^{(r)} \frac{\partial t_r}{\partial u_k},$$

allgemein $x_a^{(k_1, \dots, k_\mu)}$ in gewisse ganze rationale Functionen der Grössen $\bar{x}_a^{(k_1, \dots, k_\mu)}$ und der Ableitungen

$$t_i^{(k_1, \dots, k_\mu)} = \frac{\partial^\mu t_i}{\partial u_{k_1} \partial u_{k_2} \dots \partial u_{k_\mu}} \qquad (i = 1, \dots, r),$$

welche an dieser Stelle nicht explicite entwickelt werden sollen. Demnach ergiebt sich für die Function φ die Identität

$$\varphi(x_a^{(k_1,\dots,k_\mu)}) = \bar{\varphi}(x_a^{(k_1,\dots,k_\mu)},\ t_i^{(k_1,\dots,k_\mu)}).$$

Soll nun aber für ganz beliebige Functionen $t_1,\dots,t_r$ der ursprünglichen Parameter $u_1,\dots,u_r$ die Function einen und denselben Werth J behalten, so darf dieser von der Wahl der Grössen $t_i^{(k_1,\dots,k_\mu)}$ nicht abhängen*). Setzt man daher z. B.

$$t_1 = u_1,\ t_2 = u_2,\ \dots,\ t_r = u_r,$$

wo

$$\left|\frac{\partial t_i}{\partial u_k}\right| = 1, \qquad (i,k=1,\dots,r)$$

also von Null verschieden ist, so ergiebt sich für $t_i^{(k_1,\dots,k_\mu)}$ im allgemeinen der Werth Null, ausgenommen, wenn $\mu = 1$ und $k_1 = i$ ist, wo dann $t_i^{(i)}$ den Werth 1 besitzt. Dann wird aber

$$\varphi(x_a^{(k_1,\dots,k_\mu)}) = \varphi(\bar{x}_a^{(k_1,\dots,k_\mu)}),$$

und diese Gleichung muss nach dem Vorhergehenden nicht nur für den speciellen Fall $t_1 = u_1,\dots,t_r = u_r$, sondern für jede beliebige Form der Functionen $t_1 = t_1(u_1,\dots,u_r),\dots,t_r = t_r(u_1,\dots,u_r)$ ihre Gültigkeit behalten.

Die vorstehende Gleichung dient gewöhnlich als Definitionsformel der Invarianten; sie sagt aus, dass eine Invariante die Eigenschaft hat, bei jeder beliebigen Substitution der unabhängigen Variabeln in den formal gleichgebildeten Ausdruck ihrer transformirten Argumente überzugehen.

Ist die gegebene Function $\varphi(x_1,\dots,x_m)$ von der Ordnung „Null", d. h. enthält sie überhaupt keine Ableitungen, so ist sie von vornherein eine Invariante, weil vermöge der Gleichungen (3.) stets identisch

$$\varphi(x_1,\dots,x_m) = \varphi(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m)$$

ist. Daher ist es bei der Untersuchung einer gegebenen Function auf ihre Invarianteneigenschaft nicht nöthig, auf ihre Abhängigkeit von den Argumenten $x_1,\dots,x_m$ einzugehen.

Wir beschränken nunmehr die weitere Untersuchung zunächst auf die Invarianten erster Ordnung.

---

*) Ueber die strenge Begründung dieser Schlussweise vergl. man die Dissertation des Herrn *Zermelo* a. a. O.

3.

Kriterium der Invarianten erster Ordnung. — Die zur Untersuchung vorgelegte Invariante sei

$$J = \varphi\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x_m}{\partial u_r}\right) = \varphi(x_a^{(k)}) \qquad (a = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r),$$

wobei die nach dem Vorstehenden ganz willkürliche Abhängigkeit von $x_1, \ldots, x_m$ nicht besonders ausgedrückt werden soll. Die Function φ muss nach erfolgter Substitution der willkürlichen Parameter $t_1, \ldots, t_r$ an Stelle von $u_1, \ldots, u_r$ die Eigenschaft besitzen, dass

$$\text{(4.)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t_i^{(j)}} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, r)$$

ist. Nun ist aber in der bereits angewandten Bezeichnungsweise

$$x_a^{(k)} = \sum_i \frac{\partial \bar{x}_a}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial t_i}{\partial u_k} = \sum_i \bar{x}_a^{(i)} t_i^{(k)},$$

und demnach

$$\varphi(x_a^{(k)}) = \varphi(\bar{x}_a^{(k)}) = \varphi(\sum_i \bar{x}_a^{(i)} t_i^{(k)}).$$

Nach Anwendung der Gleichung (4.) ergiebt sich daher, weil man für $\bar{x}_a^{(k)}$ nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten $x_a^{(k)}$ schreiben darf:

$$\text{(5.)} \qquad \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial x_a^{(k)}} x_a^{(i)} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix} a = 1, \ldots, m \\ i, k = 1, \ldots, r \end{smallmatrix}\right).$$

Die vorstehende Formel repräsentirt ein System von r^2 Gleichungen. Unter der Voraussetzung, dass sie sämmtlich mit einander verträglich sind, stellen sie die nothwendige, und wie man sieht, auch hinreichende Bedingung für die Invarianz der gegebenen Function φ dar. Es ist daher zunächst zu untersuchen, unter welchen Bedingungen das System von r^2 homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die Function φ zu genügen hat, keinen Widerspruch enthält.

Man ertheile dem Index k einen festen Werth; dann lautet das System der Gleichungen (5.):

$$\text{(6.)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1^{(k)}} x_1^{(1)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2^{(k)}} x_2^{(1)} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m^{(k)}} x_m^{(1)} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1^{(k)}} x_1^{(2)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2^{(k)}} x_2^{(2)} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m^{(k)}} x_m^{(2)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1^{(k)}} x_1^{(r)} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2^{(k)}} x_2^{(r)} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_m^{(k)}} x_m^{(r)} = 0. \end{array} \right.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem r nicht kleiner oder kleiner als m ist.

1. Ist $r > m$, die Anzahl der unabhängigen Variabeln grösser als die Zahl der abhängigen, so müsste, damit die Gleichungen des in Rede stehenden Systems mit einander verträglich sind, jede der Determinanten m-ten Grades der Matrix

$$\mathfrak{M} = \| x_a^{(k)} \| \qquad \binom{a = 1, \ldots, m}{k = 1, \ldots, r}$$

identisch verschwinden. Dies würde aber im Widerspruch stehen mit der Voraussetzung, dass die Functionen $x_1(u_1, \ldots, u_r), \ldots, x_m(u_1, \ldots, u_r)$ von einander functional unabhängig sind.

Wenn aber $r = m$, so müsste die Determinante

$$| x_a^{(k)} | \qquad (a, k = 1, \ldots, r)$$

verschwinden, was ebenfalls mit der angegebenen Voraussetzung im Widerspruch steht.

Ist demnach die Zahl der abhängigen Variabeln $x_1, \ldots, x_m$ nicht grösser als die Anzahl der Parameter $u_1, \ldots, u_r$, so genügt keine Function $\varphi(x_a^{(k)})$ den Bedingungen des Problems; *es existirt also in diesem Falle überhaupt keine Invariante erster Ordnung.*

2. Es bleibt nun der Fall $r < m$ zu untersuchen. Nach den Sätzen der *Jacobi-Bour*schen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*) sind die Gleichungen des Systems (6.) dann und nur dann verträglich, wenn jede der *Poisson*schen Klammergrössen

$$(\Phi_i, \Phi_j) = \sum_\beta \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\beta^{(k)}} \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta^{(k)}}} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta^{(k)}}} \cdot \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_\beta^{(k)}} \right)$$
$$(\beta = 1, \ldots, m;\ i, j = 1, 2, \ldots, r)$$

identisch verschwindet, in denen mit

$$\Phi_i = \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial x_a^{(k)}} x_a^{(i)} \qquad (a = 1, \ldots, m)$$

die linke Seite der i-ten Gleichung des Systems (6.) bezeichnet ist. Man hat aber

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\beta^{(k)}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \gtrless k \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\beta^{(k)}}, & \quad ,, \quad i = k \end{cases}$$

*) Man vergl. z. B. *Forsyth-Maser*, Lehrbuch der Differentialgleichungen, S. 372.

Wird die Invariante

$$J = \varphi(x_a^{(k)}) \qquad (a = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r;\ r < m)$$

jetzt wieder in der Form dargestellt, in welcher ihre willkürliche Abhäng keit von den Argumenten $x_1, \ldots, x_m$ nicht besonders ausgedrückt wird, ist die Anzahl ihrer (functional unabhängigen) Argumente $x_a^{(k)}$ gleich *r* Die Anzahl der Gleichungen des Systems (5.) ist aber gleich r^2. Geli es daher, ein simultanes Integral jener Gleichungen aufzustellen, welch *eine willkürliche* Function von $rm - r^2 = r(m-r)$ von einander unabhängig Argumenten enthält, so ist dies das *allgemeine* Integral des Systems.

Man bezeichne nun mit $D, D', \ldots$ die Determinanten r-ten Grad der Matrix

$$\mathfrak{M} = \| x_a^{(k)} \| = \begin{Vmatrix} x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & \ldots, & x_1^{(r)} \\ x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & \ldots, & x_2^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^{(1)}, & x_m^{(2)}, & \ldots, & x_m^{(r)} \end{Vmatrix},$$

von denen also angenommen werde, dass sie sämmtlich von Null ve schieden sind.

Dann ist

$$\sum_a \frac{\partial D}{\partial x_a^{(k)}} \cdot x_a^{(i)} = \sum_a \operatorname{adj} x_a^{(k)} \cdot x_a^{(i)},$$

d. h.

$$\sum_a \frac{\partial D}{\partial x_a^{(k)}} \cdot x_a^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \gtrless k \\ D, & \quad " \quad i = k, \end{cases}$$

wobei die Summation über alle in der Determinante D auftretenden Wer des Index α, oder schliesslich, was auf dasselbe hinauskommt, über Werthe $1, 2, \ldots, m$ dieses Index zu erstrecken ist. Die entsprechenden Form gelten für jede der übrigen Determinanten $D', D'', \ldots$ r-ten Grades Matrix $\mathfrak{M}$. Ist ferner

$$\Phi = \Phi(D, D', D'', \ldots)$$

eine beliebige Function der Argumente $D, D', \ldots$, so ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_a^{(k)}} \cdot x_a^{(i)} = \sum_{(D)} \frac{\partial \Phi}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial x_a^{(k)}} \cdot x_a^{(i)},$$

wobei die Summe auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung alle Argumente der Function Φ zu erstrecken ist. Die auf beiden S

ausgeführte Summation nach α ergiebt daher unter Anwendung der vorhergehenden Formel

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha^{(k)}} \cdot x_\alpha^{(i)} = \sum_{(D)} \frac{\partial \Phi}{\partial D} \cdot D \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Schränkt man demnach die Allgemeinheit der Function Φ in der Weise ein, dass die Gleichung

$$(7.) \qquad \sum_{(D)} \frac{\partial \Phi}{\partial D} D = 0$$

erfüllt ist, so genügt eine solche Function Φ auch dem Gleichungssystem

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha^{(k)}} \cdot x_\alpha^{(i)} = 0, \qquad \left(\begin{smallmatrix} \alpha = 1, \ldots, m \\ i, k = 1, \ldots, r \end{smallmatrix}\right)$$

d. h. die Function Φ ist hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von den Argumenten $x_\alpha^{(k)}$ ein Integral des Systems (5.) von Differentialgleichungen.

Die Gleichung (7.) sagt aus, dass $\Phi(D, D', \ldots)$ eine homogene Function ihrer Argumente $D, D', \ldots$ der Dimension Null ist. Man kann daher den Satz als bewiesen betrachten:

Eine jede homogene Function nullter Dimension der Argumente $D, D', \ldots$

$$\Phi(D, D', \ldots) = \Phi(x_\alpha^{(k)})$$

ist, betrachtet als Function von $x_\alpha^{(k)}$, eine Invariante erster Ordnung in Bezug auf die Variabeln $x_1, \ldots, x_m$.

Es soll nun aber auch nachgewiesen werden, dass eine solche Function $\Phi(D, D', \ldots)$ die *allgemeine* Lösung des Systems (5.) der Differentialgleichungen darstellt. Zu dem Ende ist der Beweis zu liefern, dass die Anzahl der von einander unabhängigen Argumente der Function Φ genau gleich

$$rm - r^2$$

ist.

Die Anzahl aller Determinanten r-ten Grades $D, D', \ldots$ der Matrix $\mathfrak{M}$ ist gleich $\binom{m}{r}$, und da wegen der vorausgesetzten functionalen Unabhängigkeit der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ keine der Determinanten verschwindet, so ist auch die Anzahl *sämmtlicher* Argumente von $\Phi(D, D', \ldots)$ gleich $\binom{m}{r}$. Soll daher die Anzahl der in $\Phi(D, D', \ldots)$ vorkommenden *unabhängigen* Argumente gleich $rm - r^2$ sein, so müssen unter ihnen

$$\binom{m}{r} - r(m - r)$$

unabhängige Relationen bestehen.

Nun ist erstens die Function Φ eine homogene Function der Dimension Null. Diese Bedingung ist z. B. identisch damit, dass Φ nur von den Quotienten $\frac{D'}{D}, \frac{D''}{D}, \dots$ abhängig ist. Die Bedingung der Homogeneität der Function Φ ist daher äquivalent dem Bestehen *einer* Relation zwischen den sämmtlichen Argumenten $D, D', \dots$.

Zweitens aber sind die Argumente $D, D', \dots$ sämmtlich Determinanten einer und derselben Matrix $\mathfrak{M}$. Man ist daher vor die Aufgabe gestellt, die Anzahl der Relationen zu ermitteln, welche zwischen den Determinanten einer Matrix bestehen.

Diese Beziehungen zwischen den Determinanten einer Matrix sind der Gegenstand einer Untersuchung des Herrn *Vahlen**) gewesen; sie ergeben sich sehr leicht auf dem folgenden, von Herrn *Vahlen* angegebenen Wege. Setzt man, unter $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ irgend r verschiedene der Zahlen $1, 2, \dots, m$ verstehend,

$$\begin{vmatrix} x_{\alpha_1}^{(1)}, & x_{\alpha_1}^{(2)}, & \dots, & x_{\alpha_1}^{(r)} \\ x_{\alpha_2}^{(1)}, & x_{\alpha_2}^{(2)}, & \dots, & x_{\alpha_2}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{\alpha_r}^{(1)}, & x_{\alpha_r}^{(2)}, & \dots, & x_{\alpha_r}^{(r)} \end{vmatrix} = D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}$$

und bezeichnet mit $A_i^{(k)}$ die Adjuncte des Elements $x_i^{(k)}$ in der Determinante $D_{1,2,\dots,r}$, so dass

$$\sum_k A_i^{(k)} x_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \gtrless j \\ D_{1,2,\dots,r}, & i = j, \end{cases}$$

so ergiebt sich nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \cdot |A_i^{(k)}| = |\sum_k A_i^{(k)} x_{\alpha_j}^{(k)}|$$
$$= |D_{1,2,\dots,i-1,\,\alpha_j,\,i+1,\dots,r}|,$$

d. h. ausgeschrieben

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \cdot D_{1,2,\dots,r}^{r-1} = \begin{vmatrix} D_{\alpha_1, 2, \dots, r}, & D_{\alpha_2, 2, \dots, r}, & \dots, & D_{\alpha_r, 2, \dots, r} \\ D_{1, \alpha_1, \dots, r}, & D_{1, \alpha_2, \dots, r}, & \dots, & D_{1, \alpha_r, \dots, r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{1,2,\dots,\alpha_1}, & D_{1,2,\dots,\alpha_2}, & \dots, & D_{1,2,\dots,\alpha_r} \end{vmatrix}.$$

*) *K. Th. Vahlen,* über die Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix. Dieses Journal Bd. 112, S. 306.

Dies sind die gesuchten Relationen; die Anzahl der von einander unabhängigen unter ihnen ist ebenfalls von Herrn *Vahlen**) bestimmt worden und beträgt

$$\binom{m}{r} - 1 - r(m-r). \tag{8.}$$

Aus der Bedingung der Homogeneität der Function

$$\Phi = \Phi(D, D', \ldots)$$

und aus der Thatsache, dass ihre Argumente sämmtlich Determinanten einer und derselben Matrix $\mathfrak{M}$ sind, folgt daher, dass zwischen den Argumenten der Function Φ in der That

$$1 + \binom{m}{r} - 1 - r(m-r) = \binom{m}{r} - r(m-r)$$

unabhängige Relationen bestehen, was zu beweisen war. Die homogene Function der nullten Dimension $\Phi(D, D', \ldots)$ enthält also genau $r(m-r)$ unabhängige Argumente und ist daher das *allgemeine* Integral des Systems (5.) der Differentialgleichungen des Problems.

Jede Invariante erster Ordnung lässt sich darstellen als eine homogene Function der Dimension Null, deren Argumente die Functionaldeterminanten r-ten Grades der Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_k} \right\| \qquad (\alpha = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r)$$

sind; die Anzahl aller unabhängigen Argumente der Invariante ist $mr - r^2$.

Damit ist das Problem hinsichtlich der Invarianten erster Ordnung erledigt. Bevor in die Erörterung einiger Anwendungen eingegangen wird, mögen die Resultate der vorstehenden Untersuchung kurz zusammengefasst werden.

Es seien $x_1, \ldots, x_m$ m Variable, welche von r Parametern $u_1, \ldots, u_r$ abhängen. Damit eine Function von $x_1, \ldots, x_m$ und den partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Variablen nach den Parametern eine Invariante sei in Bezug auf jede beliebige Substitution der Parameter, sind folgende Bedingungen nothwendig und hinreichend:

1) die Anzahl der Parameter ist kleiner als die Zahl der Variablen ($r < m$);

*) A. a. O. S. 308.

2) die Argumente $x_1, \ldots, x_m$, welche stets als von einander functional unabhängig angenommen werden können, dürfen in der Function in beliebiger Weise auftreten, die Argumente $\frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x_m}{\partial u_r}$ aber nur so, dass die Function sich darstellen lässt als eine homogene Function nullter Dimension, deren Argumente die Functionaldeterminanten r-ten Grades sind, welche sich aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_m}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial x_m}{\partial u_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r}, & \frac{\partial x_2}{\partial u_r}, & \ldots, & \frac{\partial x_m}{\partial u_r} \end{matrix} \right\|$$

bilden lassen.

5.

Anwendungen. — 1. Die Zahl der Parameter sei 1; u der Parameter. Um Invarianten bilden zu können, müssen mindestens zwei functional unabhängige Variable x, y vorhanden sein; das Gebilde ist eine ebene Curve. Daraus folgt z. B., dass eine von einem Parameter abhängige Schar ebener Curven keine Invariante (ausser Constanten) besitzt. Die Matrix $\mathfrak{M}$ ist einzeilig

$$\mathfrak{M} = \left\| \frac{dx}{du}, \frac{dy}{du} \right\|.$$

Die Invarianten erster Ordnung sind homogene Functionen der Dimension Null von $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}$. Die einfachste Invariante ist der Differentialquotient

$$\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{dy}{dx};$$

alle Invarianten erster Ordnung sind von der Form

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

unter φ eine beliebige Function ihrer Argumente verstanden.

Sind die functional unabhängigen Variablen x, y, z vorhanden, so ist das Gebilde eine Raumcurve und die Matrix

$$\mathfrak{M} = \left\| \frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du} \right\|,$$

deren Determinanten $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}$ selber sind. Relationen bestehen auch hier nicht, und überhaupt nicht, wenn das Gebilde nur von einem Parameter abhängig ist. Die einfachsten Invarianten sind die Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, und jede Invariante ist von der Form

$$\varphi\left(x, y, z; \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right).$$

2. Die Zahl der Parameter sei jetzt 2, die Parameter u und v; damit Invarianten existiren, muss die Zahl der von einander functional unabhängigen Variablen mindestens gleich 3 sein. Man bezeichne sie mit x, y, z; das Gebilde ist eine Fläche. Die Matrix $\mathfrak{M}$ ist zweizeilig:

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right\|,$$

ihre Determinanten sind in der Bezeichnung der Functionaldeterminanten

$$D(x,y) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad D(y,z) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad D(z,x) = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},$$

zwischen denen keine Relationen bestehen. Setzt man

$$D^2(x,y) + D^2(y,z) + D^2(z,x) = \Sigma D^2(x,y) = a,$$

wo unter dem Zeichen Σ ohne Index die durch cyklische Permutation von x, y, z zu bildende Summation verstanden werden soll, so ist zwar a keine Invariante, wohl aber jeder der Ausdrücke

$$X = \frac{D(y,z)}{\sqrt{a}}, \quad Y = \frac{D(z,x)}{\sqrt{a}}, \quad Z = \frac{D(x,y)}{\sqrt{a}},$$

zwischen denen die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

besteht. Die geometrische Bedeutung der Invarianten X, Y, Z ist be-

kanntlich die, dass X z. B. den Cosinus des Winkels darstellt, den die positive Richtung der x-Axe mit der Flächennormalen bildet. Die Grösse a ist die Discriminante der quadratischen Differentialform, welche das Quadrat des Linienelements darstellt. Jede Invariante erster Ordnung lässt sich als Function von X, Y, Z darstellen, z. B.

$$P = xX + yY + zZ,$$

der Abstand der Tangentialebene vom Coordinatenanfang, u. s. f.

Zu den drei Variablen x, y, z trete noch eine vierte, φ, während die Zahl der Parameter unverändert bleibe. Die Matrix ist

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{matrix} \right\|,$$

zwischen deren sechs Determinanten nach der Formel (8.) eine Relation

$$\Sigma D(x, y) \cdot D(z, \varphi) = 0$$

besteht. Zu den Invarianten X, Y, Z kommen noch die folgenden, auf entsprechende Weise gebildeten:

$$\theta(x, \varphi) = \frac{D(x, \varphi)}{\sqrt{a}}, \quad \theta(y, \varphi) = \frac{D(y, \varphi)}{\sqrt{a}}, \quad \theta(z, \varphi) = \frac{D(z, \varphi)}{\sqrt{a}},$$

welche von *Beltrami* in die Flächentheorie eingeführt sind*) und im Folgenden auch kurz als θ-Invarianten bezeichnet werden sollen. Weil

$$X = \theta(y, z), \qquad Y = \theta(z, x), \qquad Z = \theta(x, y),$$

so ist jede von einer willkürlichen Function φ abhängige Invariante erster Ordnung durch die sechs θ-Invarianten darstellbar, zwischen denen die Gleichungen

$$\Sigma \theta^2(x, y) = 1,$$
$$\Sigma \theta(x, y) \cdot \theta(z, \varphi) = 0$$

bestehen. Die Function φ ist im allgemeinen ganz beliebig zu nehmen, nur so, dass von den Grössen x, y, z, φ, als Functionen der beliebigen Parameter u und v betrachtet, keine zwei von einander abhängig sind. Man kann demnach z. B. der Reihe nach auch φ gleich X, Y, Z setzen; auf diese Weise

*) Vgl. *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III. S. 197 ff.

ergiebt sich aus dem Bestehen der drei, aus der zweiten der vorstehenden Gleichungen folgenden Relationen die Gleichung

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} \theta(x,X), & \theta(y,X), & \theta(z,X) \\ \theta(x,Y), & \theta(y,Y), & \theta(z,Y) \\ \theta(x,Z), & \theta(y,Z), & \theta(z,Z) \end{vmatrix} = 0.$$

Invarianten, welche ausser den Ableitungen der drei Coordinaten x, y, z noch die von willkürlichen Functionen $\varphi, \ldots$ enthalten, werden nach *Bianchi**) Differentialparameter genannt. Danach sind $\theta(x,\varphi)$, $\theta(y,\varphi)$, $\theta(z,\varphi)$ Differentialparameter, und daher auch

$$(10.)\qquad \Delta\varphi = \Sigma\theta^2(x,\varphi).$$

Die Ausrechnung dieser Invariante zeigt aber, dass sie sich in die Form

$$(11.)\qquad \Delta\varphi = \frac{a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{a}$$

bringen lässt, in der a_{11}, a_{12}, a_{22} die im Linienelement der Fläche

$$ds = \sqrt{a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2}$$

auftretenden Coefficienten, und a, wie vorher, ihre Discriminante bezeichnet. Die durch die Formel (10.) definirte Invariante ist daher identisch mit dem *Beltrami*schen Differentialparameter. Nimmt man umgekehrt die Gleichung (11.) als Definitionsgleichung, so liefert die Formel (10.) die explicite Darstellung des *Beltrami*schen Differentialparameters als Invariante, während gewöhnlich seine Invarianten-Eigenschaft in dem hier zunächst betrachteten Sinne aus geometrischen Gründen oder durch directe Substitution anderer Parameter nachgewiesen wird.

Auf diesem letzteren Wege, wie er meistens eingeschlagen wird, beweist man allerdings zunächst nur, dass die durch die obige Formel (11.) definirte Function eine *Covariante* der quadratischen Differentialform

$$A = a_{11}\,du^2 + 2a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2$$

ist; eine Invariante in dem Sinne, dass ihr Werth von der Wahl der krummlinigen Coordinaten nicht abhängt, ist aber die rechte Seite dieser Formel erst dann, wenn die Differentialform A eine solche Invariante, z. B. wenn $A = ds^2$ ist, was principiell eines besondern Beweises bedarf.

*) *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale, § 22.

Es ist jedoch darauf hinzuweisen, dass die Formel (11.) von einem andern Gesichtspunkte aus mehr aussagt als die Darstellung (10.) durch θ-Invarianten; aus der ersteren ist nämlich, da die Grössen a_{11}, a_{12}, a_{22} von der Wahl der cartesischen Coordinaten nicht abhängen, unmittelbar ersichtlich, dass auch $\varDelta\varphi$ von der Lage der Fläche im Raume unabhängig ist. Hierüber vergleiche man weiter unten.

Tritt zu den Functionen x, y, z, φ noch eine ψ, so ist die Matrix

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix} \right\|,$$

zwischen deren Determinanten zufolge der Formel (8.) drei Relationen bestehen, welche sich in die Form

$$\Sigma D(x, y)\cdot D(z, \varphi) = 0,$$
$$\Sigma D(x, y)\cdot D(z, \psi) = 0,$$
$$D(x, \varphi)\cdot D(y, \psi) - D(y, \varphi) D(x, \psi) = D(x, y)\cdot D(\varphi, \psi)$$

setzen lassen.

Führt man daher, wie vorher, die θ-Invarianten ein vermöge der Gleichung

$$\theta(\varphi, \psi) = \frac{D(\varphi, \psi)}{\sqrt{a}},$$

so bestehen zwischen den θ-Invarianten dieselben Relationen wie zwischen den Functionaldeterminanten $D(\varphi, \psi)$.

Die Invariante

$$(12.)\qquad \varDelta(\varphi, \psi) = \Sigma\theta(x, \varphi)\cdot\theta(x, \psi)$$

ist identisch mit dem *Beltrami*schen Zwischenparameter

$$\varDelta(\varphi, \psi) = \frac{a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} - a_{12}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{a};$$

die Formel (12.) gibt seine explicite Darstellung als Invariante. Die Anwendung der bekannten *Lagrange*schen Identität auf die Formeln (10.) und (12.) liefert die Relation

$$\begin{vmatrix} \varDelta\varphi & \varDelta(\varphi, \psi) \\ \varDelta(\varphi, \psi) & \varDelta\psi \end{vmatrix} = \theta^2(\varphi, \psi).\text{*)}$$

*) *Darboux*, a. a. O.

Man betrachte endlich sechs Variable $x, y, z, \varphi, \psi, \chi$. Unter den Determinanten der Matrix

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

bestehen sechs unabhängige Relationen, welche sich nach Einführung der θ-Invarianten in folgender Form schreiben lassen

$$\begin{aligned} \Sigma\theta(x,y)\theta(z,\varphi) &= 0, & S\theta(\varphi,\psi)\theta(x,\chi) &= 0, \\ \Sigma\theta(x,y)\theta(z,\psi) &= 0, & S\theta(\varphi,\psi)\theta(y,\chi) &= 0, \\ \Sigma\theta(x,y)\theta(z,\chi) &= 0, & S\theta(\varphi,\psi)\theta(z,\chi) &= 0, \end{aligned}$$

unter S die durch cyklische Permutation von φ, ψ, χ auszuführende Summation verstanden. Aus den drei ersten dieser Relationen folgt

$$(13.) \qquad |\theta_{ik}| = \begin{vmatrix} \theta(x,\varphi) & \theta(y,\varphi) & \theta(z,\varphi) \\ \theta(x,\psi) & \theta(y,\psi) & \theta(z,\psi) \\ \theta(x,\chi) & \theta(y,\chi) & \theta(z,\chi) \end{vmatrix} = 0,$$

und daraus, wie leicht zu beweisen,

$$\begin{vmatrix} \varDelta\varphi & \varDelta(\varphi,\psi) & \varDelta(\varphi,\chi) \\ \varDelta(\varphi,\psi) & \varDelta(\psi) & \varDelta(\psi,\chi) \\ \varDelta(\varphi,\chi) & \varDelta(\psi,\chi) & \varDelta\chi \end{vmatrix} = 0,$$

und da die Gleichung (13.) auch eine Folge der drei letzten der vorstehenden Relationen ist, so ergiebt sich gleichzeitig

$$\begin{aligned} \theta(y,z):\theta(z,x):\theta(x,y) &= \operatorname{adj}\theta_{1\beta}:\operatorname{adj}\theta_{2\beta}:\operatorname{adj}\theta_{3\beta}, \\ \theta(\psi,\chi):\theta(\chi,\varphi):\theta(\varphi,\psi) &= \operatorname{adj}\theta_{\alpha 1}:\operatorname{adj}\theta_{\alpha 2}:\operatorname{adj}\theta_{\alpha 3} \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\theta(\psi,\chi)}{\theta(y,z)}:\frac{\theta(\chi,\varphi)}{\theta(z,x)}:\frac{\theta(\varphi,\psi)}{\theta(x,y)} = \frac{\operatorname{adj}\theta_{\alpha 1}}{\operatorname{adj}\theta_{1\beta}}:\frac{\operatorname{adj}\theta_{\alpha 2}}{\operatorname{adj}\theta_{2\beta}}:\frac{\operatorname{adj}\theta_{\alpha 3}}{\operatorname{adj}\theta_{3\beta}}.$$

Nimmt man nun $\varphi = X, \psi = Y, \chi = Z$, so geht die Gleichung (13.) in die frühere (9.) über; weil aber infolge der Relation

$$\Sigma X^2 = 1$$

die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

verschwinden, also homogene lineare Gleichungen zwischen den Elementen der einzelnen Zeilen in den vorstehenden Determinanten bestehen, so folgt, dass die Verhältnisse

$$\frac{\theta(Y,Z)}{\theta(y,z)} = \frac{\theta(Z,X)}{\theta(z,x)} = \frac{\theta(X,Y)}{\theta(x,y)}$$

einen und denselben Werth besitzen, welcher mit k bezeichnet werden möge. Von ihm wird in der Theorie der krummen Flächen nachgewiesen, dass er mit dem *Gauss*schen Krümmungsmass identisch ist*). Durch die Gleichungen

$$k = \frac{\theta(Y,Z)}{\theta(y,z)} = \frac{\theta(Z,X)}{\theta(z,x)} = \frac{\theta(X,Y)}{\theta(x,y)}$$

oder

$$k^2 = \Sigma\theta^2(Y,Z) = \Sigma\theta(y,z)\theta(Y,Z)$$

ist also das *Gauss*sche Krümmungsmass als Invariante der Fläche dargestellt.

Die Invarianten $\theta(x,X), \dots$, also auch k sind von der zweiten Ordnung; sie lassen sich nach dem Vorstehenden mit Hülfe der wiederholten Anwendung der θ-Operation darstellen. In Bezug auf die Invarianten beliebig hoher Ordnung lässt sich aber der Satz beweisen, dass sie sämmtlich durch wiederholte Anwendung der invarianten Operation $\theta(\varphi,\psi)$ und $\Delta(\varphi)$ darstellbar sind**). Da nun aber die Invariante $\Delta(\varphi)$ vermöge der Formel (10.) selbst durch θ-Invarianten ausdrückbar ist, so folgt daraus:

Jede Invariante einer Fläche lässt sich durch wiederholte Bildung der θ-Invarianten darstellen.

Für den *Beltrami*schen Differentialparameter zweiter Ordnung

$$\Delta_2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{\sqrt{a}}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{a_{12}}{\sqrt{a}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_{11}}{\sqrt{a}}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{a_{12}}{\sqrt{a}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right)$$

*) *Gauss*, Disquis. circa superf. curv. art. 7.

**) Man vergl. *G. Darboux*, a. a. O. S. 204, wo dieser Satz für Biegungsinvarianten bewiesen wird, und den folgenden Abschnitt 6 dieser Arbeit.

ist eine solche Darstellung z. B. gegeben durch die Formel

$$\Delta_2(\varphi) = \Sigma\theta(x, \theta(x, \varphi)),$$

wie sich leicht dadurch nachweisen lässt, dass man den Differentialparameter in die Form

$$\Delta_2(\varphi) = A\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + A_0\frac{\partial\varphi}{\partial u} + B_0\frac{\partial\varphi}{\partial v}\text{*)}$$

bringt, deren Coefficienten A, B, C von den drei im Linienelement auftretenden Fundamentalgrössen a_{11}, a_{12}, a_{22}, A_0 und B_0 aber von diesen und von den *Christoffel*schen Symbolen

$$\begin{Bmatrix} i\;k \\ h \end{Bmatrix}$$

abhängen.

Die mittlere Flächenkrümmung ist nach einer bekannten *Beltrami*schen Formel**) gegeben durch

$$H = \frac{\Delta_2(x)}{X} = \frac{\Delta_2(y)}{Y} = \frac{\Delta_2(z)}{Z},$$

also nach dem Vorstehenden in der Form

$$H = \frac{\theta(y, Z) + \theta(z, Y)}{\theta(y, z)} = \frac{\theta(z, X) + \theta(x, Z)}{\theta(z, x)} = \frac{\theta(x, Y) + \theta(y, X)}{\theta(x, y)}$$

oder

$$H = \Sigma\,\theta(y, z)\,(\theta(y, Z) + \theta(z, Y))$$

durch θ-Invarianten darstellbar.

Ueber weitere Darstellungen flächentheoretischer Invarianten durch θ-Invarianten vergleiche man in erster Linie die Abhandlung des Herrn *Frobenius* „Ueber die in der Theorie der Flächen auftretenden Differentialparameter" ***), in welcher sich auch die meisten der entwickelten Formeln für die invarianten Darstellungen der Differentialparameter, sowie von H und K finden.

---

*) *J. Knoblauch*, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, S. 178.

**) Vgl. z. B. *Knoblauch*, a. a. O. S. 182.

***) Dieses Journal, Bd. 110, S. 1. Vgl. insbesondere S. 10ff. Die hier nach Herrn *Darboux* mit $\theta(\varphi, \psi)$ bezeichnete Invariante heisst dort $[\varphi, \psi]$.

6.

Ueber die Invarianten höherer Ordnung. — Man betrachte nun wieder die Determinanten der Matrix

$$\mathfrak{M} = \| x_a^{(k)} \| \qquad \left(\begin{smallmatrix} a = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, r \end{smallmatrix}\right),$$

immer für den Fall, dass $r < m$, und setze

$$D(x_{a_1}, \dots, x_{a_r}) = \begin{vmatrix} x_{a_1}^{(1)}, & \dots, & x_{a_1}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{a_r}^{(1)}, & \dots, & x_{a_r}^{(r)} \end{vmatrix},$$

wo jeder der Indices $a_1, \dots, a_r$ irgend r verschiedene der Werthe $1, \dots, m$ zu durchlaufen hat. Nach dem Vorstehenden ist die Function

$$\theta(x_{a_1}, \dots, x_{a_r}) = \frac{D(x_{a_1}, \dots, x_{a_r})}{R},$$

in welcher R irgend eine nicht verschwindende homogene Function erster Dimension der verschiedenen Determinanten r-ten Grades der Matrix $\mathfrak{M}$ bedeute, eine Invariante. Zu den m Grössen $x_1, \dots, x_m$ mögen nun noch weitere $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ in beliebiger Anzahl treten, welche keiner weiteren Beschränkung unterworfen seien, als dass jede der Functionaldeterminanten $D(\varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_r})$ von Null verschieden ist; dann ist die Grösse

$$\theta(\varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_r}) = \frac{D(\varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_r})}{R}$$

ein Differentialparameter erster Ordnung.

Man setze nun r der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ gleich $u_1, u_2, \dots, u_r$, die übrigen aber nehme man als von $u_1, \dots, u_r$ verschieden an und so, dass die derart gewählten Functionen die oben angeführte Bedingung erfüllen; man hat dann, da die Functionaldeterminante $D(u_1, \dots, u_r)$ den Werth 1, die Functionaldeterminante

$$D(u_1, \dots, u_{i-1}, \varphi, u_{i+1}, \dots, u_r)$$

aber den Werth $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$ hat, unter φ irgend eine willkürliche Function verstanden, die Relationen

$$\theta(u_1, \dots, u_r) = \frac{1}{R}$$

$$\theta(u_1, \dots, u_{i-1}, \varphi, u_{i+1}, \dots, u_r) = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

Ein specieller Fall des hier ausgesprochenen Satzes ist der bereits citirte von Herrn *Darboux**) herrührende Satz der Differentialgeometrie, dass sich eine jede Biegungsinvariante durch wiederholte Anwendung der Symbole $\theta(\varphi, \psi)$ und $\Delta(\varphi, \psi)$ darstellen lässt.

7.

Ueber die Fundamentalinvarianten. — Von den im Vorstehenden betrachteten allgemeinen Invarianten sind in der Geometrie diejenigen von besonderer Bedeutung, welche gleichzeitig die Eigenschaft besitzen, von der Wahl des orthogonalen cartesischen Coordinatensystems unabhängig zu sein. Hierher gehören bekanntlich $\Delta\varphi$, $\Delta(\varphi, \psi)$, k, u. s. w., nicht aber z. B. $X = \theta(x, y)$, $\theta(x, \varphi)$.

Solche speciellen, von der Lage des Gebildes unabhängigen Invarianten mögen von den allgemeinen durch die Bezeichnung „Fundamentalinvarianten", aus einem sogleich ersichtlichen Grunde, unterschieden werden. Eine Function von $m+n$ Variablen und ihren ersten Ableitungen

$$J = F(x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(r)}; \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(r)})$$

— wobei wie im Anfang dieser Arbeit die Untersuchung zunächst auf die erste Ordnung beschränkt sei — ist demnach dann eine Fundamentalinvariante, wenn sie

erstens eine Invariante des Gebildes $(x_1, \dots, x_m)$ ist,

zweitens ihren Werth nicht ändert, wenn das Gebilde einer Lagenänderung unterworfen wird.

Die m-fache Mannigfaltigkeit sei als eine euklidische vorausgesetzt. Man betrachte nun zunächst eine Function von $x_1, \dots, x_m$, welche bei einer homogenen orthogonalen Transformation der $x_1, \dots, x_m$, d. h. bei einer Drehung des Coordinatensystems unverändert bleibt, so lässt sich leicht nachweisen, dass sie sich stets als Function der Grösse

$$\varrho = \sum_\alpha x_\alpha^2 \qquad (\alpha = 1, \dots, m)$$

darstellen lässt. Sind ferner $\xi_1, \dots, \xi_m$ irgend m den Coordinaten $x_1, \dots, x_m$ cogrediente Grössen, so ist jede Function des Ausdrucks

$$\sigma = \sum_\alpha x_\alpha \xi_\alpha$$

*) *G. Darboux*, a. a. O. S. 204.

unabhängig von der Drehung des orthogonalen Coordinatensystems, und jede Function $f(x_1, \dots, x_m; \xi_1, \dots, \xi_m)$ von dieser Eigenschaft ist nothwendiger Weise eine Function der Argumente $\varrho, \sigma, \tau = \sum_a \xi_a^2$ *). Nimmt man daher für $\xi_1, \dots, \xi_m$ die Grössen $x_1^{(k)} = \frac{\partial x_1}{\partial u_k}, \dots, x_m^{(k)} = \frac{\partial x_m}{\partial u_k}$, welche die Bedingung der Cogredienz erfüllen, so ist jede Function $f(x_1, \dots, x_m; x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(r)})$, welche von der Drehung des orthogonalen Coordinatensystems unabhängig ist, nothwendiger Weise eine Function der Argumente

$$a_{pq} = \sum_a x_a^{(p)} x_a^{(q)}, \quad (p, q = 0, 1, \dots, r;\ a = 1, \dots, m)$$

wobei unter $x_a^{(0)}$ die Coordinate x_a selber verstanden wird.

Von einer Verschiebung des Coordinatensystems sind nun aber nur diejenigen der Grössen a_{pq} unabhängig, welche die Coordinaten $x_1, \dots, x_m$ nicht enthalten, d. h. die Grössen

$$a_{\lambda\mu}. \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

Sie sind demnach überhaupt von der Wahl des cartesischen Coordinatensystems unabhängig; sie gehen für den Fall der krummen Fläche ($r = 2$) in die bekannten *Gauss*schen E, F, G über und sollen daher wie diese als „Fundamentalgrössen“ des Gebildes bezeichnet werden. Demnach sind auch

$$b_{\lambda\mu} = \sum_a x_a^{(\lambda)} \xi_a^{(\mu)} \quad (\lambda, \mu = 1, \dots, r)$$

Fundamentalgrössen; für den Fall der Fläche, und wenn man ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Coordinaten der *Gauss*schen Kugel wählt, entstehen daraus die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L, M, N, in der von Herrn *Knoblauch* angewandten Bezeichnungsweise. Die bekannten *Gauss*schen Grössen D, D', D'' sind keine Fundamentalgrössen.

Dabei ist zu bemerken, dass die Fundamentalgrössen im allgemeinen keine Invarianten des Gebildes sind.

Man betrachte nun wieder die Fundamentalinvariante erster Ordnung

$$J = F(x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(r)}; \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(r)}).$$

---

*) Man vergl. hierüber u. a. die Arbeiten *Lies* über die Invarianten der Gruppe der Bewegungen (z. B. *Lie-Scheffers*, Vorlesungen über continuirliche Gruppen, S. 674). Bei *Lie* werden Grössen wie die obigen ϱ, σ, τ ebenfalls als „Differential“-Invarianten bezeichnet.

Nach dem Vorstehenden dürfen in ihr die Coordinaten $x_1, \ldots, x_m$ selbst nicht auftreten; sie muss sich daher in der Form

$$J = \Phi\,(a_{11}, \ldots, a_{rr}; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(r)})$$

ausdrücken lassen. Diese Darstellung besagt, dass J von der Wahl der cartesischen Coordinaten nicht abhängt. Da nun aber ferner J eine Invariante des Gebildes ist, so muss die Function Φ den Differentialgleichungen (5.) S. 247 Genüge leisten.

Man erhält auf diese Weise diejenigen Differentialgleichungen, welchen jede Fundamentalinvariante erster Ordnung zu genügen hat. Das allgemeine Integral derselben, welches sich in ähnlicher Weise wie bei den allgemeinen Invarianten des Gebildes als homogene Function nullter Dimension von Functionaldeterminanten darstellen lässt, liefert die sämmtlichen Fundamentalinvarianten erster Ordnung.

Man zeigt leicht, dass

$$\theta\,(\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_r}) = \frac{D\,(\varphi_{a_1}, \ldots, \varphi_{a_r})}{a},$$

$$\Delta\,(\varphi_\lambda, \varphi_\mu) = -\frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0, & \varphi_\lambda^{(1)}, & \ldots, & \varphi_\lambda^{(r)} \\ \varphi_\mu^{(1)}, & a_{11}, & \ldots, & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_\mu^{(r)}, & a_{r1}, & \ldots, & a_{rr} \end{vmatrix}$$

u. s. w. diese Eigenschaft besitzen, wo $a = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr}$.

Weil ferner jede quadratische Form

$$A = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu$$

der Differentiale $du_1, \ldots, du_r$, deren Coefficienten Fundamentalgrössen sind, die Eigenschaften einer Fundamentalinvariante besitzt, so sind sämmtliche „absolute Invarianten der Form" (in dem in der Theorie der Formen gebräuchlichen Sinne) auch Fundamentalinvarianten des Gebildes, für welches die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ Fundamentalgrössen sind.

im Berührungspunkt der beiden Kugeln die electrische Dichtigkeit gleich Null sein muss.*)

Für alle andern Punkte der Oberfläche der Kugel K_1

$$0 \leqq \lambda < 1$$

lässt sich der Nachweis der Convergenz der Reihe leicht führen. Man benutzt hierzu zweckmässig die Gleichung (28.), in welcher an Stelle der Grösse $\lambda = cos^2 \frac{1}{2}\vartheta$ die Grösse $\tau = cot^2 \frac{1}{2}\vartheta$ eingeführt wurde. In etwas ausführlicherer Form kann diese Gleichung geschrieben werden

$$(30.) \quad \begin{cases} \dfrac{4\pi a h}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2\gamma-1}{[(2\gamma-1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2\gamma+1}{[(2\gamma+1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} - \cdots \\ + \dfrac{2(n-1)\gamma+1}{[(2(n-1)\gamma+1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2n\gamma-1}{[(2n\gamma-1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2n\gamma+1}{[(2n\gamma+1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} - \cdots, \end{cases}$$

worin n alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ bedeuten kann. So lange die Bedingung besteht, dass $1-\lambda$ nicht unendlich klein werden soll, wird τ eine positive *endliche* Grösse darstellen.

Wegen der wechselnden Vorzeichen ist die Convergenz der auf der rechten Seite der Gleichung (30.) stehenden Reihe bereits nachgewiesen, wenn gezeigt wird, dass von irgend einem Gliede an die Glieder der Reihe ständig abnehmen.

Die betrachtete Reihe hat nun die Eigenschaft, dass im allgemeinen die Glieder vom ersten bis zu einem gewissen Gliede G ständig anwachsen. Bei G erreicht der absolute Werth der Glieder ein Maximum. Von G ab nehmen die Reihenglieder wieder ständig ab. Der Beweis ist einfach.

Schreibt man die Gleichung (30.) wie folgt

$$(31.) \quad \begin{cases} \dfrac{4\pi a h}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x_1}{(x_1^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{x'_1}{(x'^2_1+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \cdots \\ \qquad + \dfrac{x'_{n-1}}{(x'^2_{n-1}+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x_n}{(x_n^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{x'_n}{(x'^2_n+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \cdots, \end{cases}$$

*) Denkt man sich nämlich an Stelle des Berührungspunktes eine kleine Berührungsfläche, etwa eine sehr kleine ebene Kreisfläche, so können die beiden Kugeln zusammen als ein einziger Leiter und die Punkte jener ebenen Kreisfläche als *innere* Punkte des Leiters aufgefasst werden. In den inneren Punkten eines Leiters befindet sich nirgends getrennte Electricität. Diese Schlussfolgerung bleibt bestehen, auch wenn man zur Grenze übergeht und die ebene Kreisfläche beliebig klein werden lässt.

worin allgemein bedeutet

$$\left.\begin{aligned} x_n &= 2n\gamma - 1 \\ x'_n &= 2n\gamma + 1 \end{aligned}\right\} \quad (n = 1 \text{ bis } \infty),$$

so hat man, da γ grösser als 1 ist,

$$x'_{n-1} < x_n < x'_n < x_{n+1}.$$

Diese dem Zahlenwerth nach auf einander folgenden positiven Grössen x können offenbar als diejenigen *Abscissen* der Curve

$$y = \frac{x}{(x^2+\tau)^{\frac{3}{2}}}$$

betrachtet werden, deren *Ordinaten* y die Reihenglieder selbst repräsentiren.

Differentiirt man in dieser Gleichung nach x und setzt den Differentialquotienten gleich Null, so ergiebt sich, dass das einzige positive Maximum von y, welches vorkommt, für

$$x^* = \sqrt{\frac{\tau}{2}}$$

erreicht wird; man erhält für diesen Werth

$$y_{max} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,\frac{1}{\tau} = \frac{0{,}3849}{\tau}.$$

Dasjenige Glied der betrachteten Reihe, welches mit seinem absoluten Betrage diesem Werthe am nächsten kommt, ist das oben mit G bezeichnete grösste Glied. Von G ab nehmen die Glieder der Reihe ständig ab, d. h. dieselbe convergirt.

Wird einer der beiden Gleichungen

$$x_n = x^*$$

oder

$$x'_n = x^*$$

d. h.

$$(32.) \qquad 2n\gamma - 1 = \sqrt{\frac{\tau}{2}}$$

oder

$$(33.) \qquad 2n\gamma + 1 = \sqrt{\frac{\tau}{2}}$$

durch eine *ganze Zahl n* genügt, so wird das Reihenglied

$$\frac{2n\gamma - 1}{[(2n\gamma-1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}}$$

bezw.

$$\frac{2n\gamma+1}{[(2n\gamma+1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}}$$

das grösste Glied G der ganzen Reihe sein.

Aber auch im allgemeinen Falle, d. h. dann, wenn weder die Gleichung (32.) noch die Gleichung (33.) für n eine ganze Zahl ergiebt, kann man zur Bestimmung der Stelle, an welcher das Glied G stehen wird, durch folgende Ueberlegung eine Regel erlangen. In diesem Falle muss sich das Maximum y_{max} einschalten zwischen zwei Reihengliedern von der Form

$$\frac{x'_{n-1}}{(x'^2_{n-1}+\tau)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\frac{x'_n}{(x'^2_n+\tau)^{\frac{3}{2}}}$$

[Gleichung (31.)]; es muss also die Bedingung erfüllt sein

$$x'_{n-1} < x^* < x'_n$$

oder

$$2(n-1)\gamma+1 < \sqrt{\frac{\tau}{2}} < 2n\gamma+1$$

d. h. es muss auch sein

$$\frac{1}{2\gamma}\Big(\sqrt{\frac{\tau}{2}}-1\Big) < n < \frac{1}{2\gamma}\Big(\sqrt{\frac{\tau}{2}}-1\Big)+1.$$

Aus dieser Ungleichung geht hervor, dass n die ***nächstgrössere auf den Werth*** $\frac{1}{2\gamma}\Big(\sqrt{\frac{\tau}{2}}-1\Big)$ ***folgende ganze Zahl*** sein wird. Diese Zahl n ergiebt, in eines der auf der rechten Seite der Gleichung (30.) zuletzt angeschriebenen drei Glieder eingesetzt, das grösste Glied G der Reihe.*)

*) Von diesen drei Gliedern kommen wieder, wie man leicht erkennt, für die Bestimmung des Gliedes G nur die beiden ersten oder nur die beiden letzten in Betracht, je nachdem

$$n \gtrless \frac{1}{2\gamma}\Big(\sqrt{\frac{\tau}{2}}+1\Big).$$

Wir gehen nun dazu über, aus Gleichung (29.) die Zahlenwerthe $\frac{4\pi ah}{A}$ für verschiedene Werthe von τ zu berechnen, also Zahlen zu bestimmen, welche den electrischen Dichtigkeiten auf zwei gleich grossen, sich berührenden Kugeln proportional sind.

Versucht man die Berechnung direct nach Gleichung (29.) durchzuführen, so ersieht man bald, dass namentlich für solche Punkte der Kugeloberfläche, welche in einiger Nähe des Berührungspunktes der beiden Kugeln liegen, die rechnerischen Schwierigkeiten gross werden. Die in Gleichung (29.) vorkommende Reihe convergirt nämlich in solchen Fällen nur langsam und es müsste in Folge dessen eine sehr grosse Anzahl von Reihengliedern berechnet werden.

Die Reihe lässt sich jedoch, wie im Weiteren gezeigt werden soll, durch geeignete Umformung in eine solche von grösserer Convergenz verwandeln.

Für $\gamma = 2$, d. h. für den hier zu betrachtenden Specialfall geht die Reihe (30.) über in

$$\begin{aligned} \frac{4\pi ah}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{(1^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{(3^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} + \cdots + \frac{4n-3}{[(4n-3)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4n-1}{[(4n-1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} \\ (34.) \qquad & + \frac{4n+1}{[(4n+1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4n+3}{[(4n+3)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}} + \cdots, \end{aligned}$$

in welcher Gleichung n wieder jede ganze Zahl von 1 bis ∞ bedeuten kann.

Es werde nun für die Folge der auf der rechten Seite der Gleichung in der ersten Zeile stehende Ausdruck, welcher, wie leicht ersichtlich, die **2*n* *ersten Glieder der Reihe*** enthält, mit W_{2n} bezeichnet, also gesetzt

$$(35.) \qquad W_{2n} = \frac{1}{(1^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{(3^2+\tau)^{\frac{3}{2}}} + \cdots - \frac{4n-1}{[(4n-1)^2+\tau]^{\frac{3}{2}}}.$$

Dann kann auch geschrieben werden

$$\frac{4\pi ah}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} = W_{2n} + \sum_{\nu=1}^{x} \left[\frac{1}{(4n+4\nu-3)^2 \left[1+\frac{\tau}{(4n+4\nu-3)^2}\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(4n+4\nu-1)^2 \left[1+\frac{\tau}{(4n+4\nu-1)^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

In den Nennern der Glieder des Summenausdrucks kommen Brüche vor von der Form

$$\frac{\tau}{(4n+4\nu-i)^2},$$

worin i gleich 1 oder 3 sein kann. Den grössten aller dieser (positiven) Brüche erhält man, wenn man $i = 3$, $\nu = 1$ setzt. Sobald man also Sorge trägt, dass

$$(36.)\qquad \frac{\tau}{(4n+1)^2} < 1$$

ist, kann man in obiger Reihe die zur $-\frac{3}{2}$ten Potenz erhobenen Klammerausdrücke nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln und erhält, wenn man nach Potenzen von τ ordnet

$$(37.)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi ah}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} = W_{2n} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(4n+4\nu-3)^2} - \dfrac{1}{(4n+4\nu-1)^2}\right] \\ \qquad -\dfrac{3}{2}\tau \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(4n+4\nu-3)^4} - \dfrac{1}{(4n+4\nu-1)^4}\right] \\ \qquad +\dfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\tau^2 \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(4n+4\nu-3)^6} - \dfrac{1}{(4n+4\nu-1)^6}\right] - \cdots \end{cases}$$

Um diese Reihe auf ihre Convergenz zu untersuchen schreiben wir

$$(38.)\qquad \frac{4\pi ah}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} = W_{2n} + G_1 - G_2 + G_3 - \dots,$$

so dass allgemein sein wird

$$G_k = \frac{3\cdot 5 \, .. \, (2k-1)}{2\cdot 4 \, .. \, (2k-2)} \tau^{k-1} \left[\frac{1}{(4n+1)^{2k}} - \frac{1}{(4n+3)^{2k}} + \frac{1}{(4n+5)^{2k}} - \cdots\right]$$

$$G_{k+1} = \frac{3\cdot 5 \, .. \, (2k+1)}{2\cdot 4 \, .. \, 2k} \tau^{k} \left[\frac{1}{(4n+1)^{2k+2}} - \frac{1}{(4n+3)^{2k+2}} + \frac{1}{(4n+5)^{2k+2}} - \cdots\right],$$

in welchen Ausdrücken $k = 2$ bis ∞ sein kann.

Nun besteht für zwei beliebige Zahlen z_1 und z_2, von welchen z_1 die dem absoluten Betrage nach kleinere sei, die Beziehung

$$\frac{\dfrac{1}{z_1^{2k+2}} - \dfrac{1}{z_2^{2k+2}}}{\dfrac{1}{z_1^{2k}} - \dfrac{1}{z_2^{2k}}} < \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{k z_2^2}.$$

Um so mehr wird also sein

$$\frac{\frac{1}{z_1^{2k}} - \frac{1}{z_2^{2k}}}{\frac{1}{z_1^{2k+2}} - \frac{1}{z_2^{2k+2}}} > \frac{k}{k+1} z_1^2.$$

Mit Benutzung dieser Relation gelangt man leicht zu der Ungleichung

$$\frac{G_k}{G_{k+1}} > \frac{2k^2}{(k+1)(2k+1)} \frac{(4n+1)^2}{\tau}.$$

Die Reihe (37.) convergirt also jedenfalls bereits vom Gliede G_k an, wenn

$$\frac{(4n+1)^2}{\tau} > \frac{(k+1)(2k+1)}{2k^2}.$$

Den Grenzwerth, welchem sich der Quotient $\frac{G_k}{G_{k+1}}$ mit wachsendem k nähert, findet man, wenn man setzt

$$\frac{G_k}{G_{k+1}} = \frac{2k}{2k+1} \frac{1}{\tau} \frac{1 - \left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^{2k} + \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{2k} - \cdots}{\frac{1}{(4n+1)^2} - \frac{1}{(4n+3)^2}\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^{2k} + \frac{1}{(4n+5)^2}\left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{2k} - \cdots}.$$

Mit wachsendem k nähert sich dieses Verhältniss mehr und mehr dem Werthe

$$\left[\frac{G_k}{G_{k+1}}\right]_{k=\infty} = \frac{(4n+1)^2}{\tau}; \tag{39.}$$

d. h. die bereits früher aufgestellte Forderung (36)

$$\frac{\tau}{(4n+1)^2} < 1$$

ist nothwendige Bedingung für die Convergenz der Reihe (37.).

Wir geben nunmehr der Gleichung (37.) eine etwas andere Form, welche unseren Berechnungszwecken besonders dienlich ist. Wir setzen allgemein

$$U_{2k} = 1 - \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} - \frac{1}{7^{2k}} + \cdots, \tag{40.}$$

worin k irgend eine ganze Zahl bedeuten soll. Man kann dann auch schreiben

$$U_{2k} = 1 - \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} - \cdots - \frac{1}{(4n-1)^{2k}}$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(4n+4\nu-3)^{2k}} - \frac{1}{(4n+4\nu-1)^{2k}}\right].$$

In der ersten Zeile stehen die $2n$ *ersten Glieder der Reihe* U_{2k}; in der zweiten Zeile steht der in Gleichung (37.) (mit den Exponenten

$2k = 2, 4, 6\dots$) vorkommende Summenausdruck. Zum Zwecke einfacherer Schreibweise möge ferner gesetzt werden

$$(41.)\qquad U_{2k,2n} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4n+4\nu-3)^{2k}} - \frac{1}{(4n+4\nu-1)^{2k}}\right],$$

sodass $U_{2k,2n}$ nichts anderes bedeutet als die Reihe U_{2k} ***ausschliesslich der*** $2n$ ***ersten Glieder***. In Folge dessen lässt sich Gleichung (37.) wie folgt schreiben

$$(42.)\qquad \frac{4\pi a h}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} = W_{2n} + U_{2,2n} - \frac{3}{2}U_{4,2n}\,\tau + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}U_{6,2n}\,\tau^2 - \cdots$$

Stellt man dieser Gleichungsform die Form (38.)

$$\frac{4\pi a h}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} = W_{2n} + G_1 - G_2 + G_3 - \cdots$$

gegenüber, so ersieht man leicht, dass allgemein geschrieben werden kann

$$(43.)\qquad \frac{G_k}{G_{k+1}} = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\frac{U_{2k,2n}}{U_{2k+2,2n}},$$

eine Beziehung, welche in ausführlicherer Form schon oben bei der Ermittlung des Grenzwerthes $\left[\frac{G_k}{G_{k+1}}\right]_{k=\infty}$ benutzt wurde.

Für die Zwecke des numerischen Rechnens empfiehlt es sich schliesslich noch, in Gleichung (42.) an Stelle der Grössen $U_{2k,2n}$ gewisse Grössen $U'_{2k,2n}$ einzuführen, welche durch die folgenden Beziehungen definirt sind

$$(44.)\qquad \begin{cases} U'_{2,2n} = U_{2,2n}, \\ U'_{4,2n} = 10^4\,\frac{3}{2}\,U_{4,2n}, \\ U'_{6,2n} = 10^8\,\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\,U_{6,2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U'_{2k,2n} = 10^{4k-4}\,\frac{3\cdot 5\,..\,2k-1}{2\cdot 4\,..\,2k-2}\,U_{2k,2n}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (42.) und (43.) erhalten dann die Formen

$$(45.)\qquad \frac{4\pi a h}{A(1+\tau)^{\frac{3}{2}}} = W_{2n} + U'_{2,2n} - U'_{4,2n}\left(\frac{\tau}{10^4}\right) + U'_{6,2n}\left(\frac{\tau}{10^4}\right)^2 - \cdots,$$

$$(46.)\qquad \frac{G_k}{G_{k+1}} = \frac{10^4}{\tau}\,\frac{U'_{2k,2n}}{U'_{2k+2,2n}}.$$

Durch Verwendung der Grössen $U'_{2k,2n}$ statt der Grössen $U_{2k,2n}$ wird die Anzahl der Decimalstellen dieser letzteren auf ein für die Rechnung bequemeres Mass reducirt.

Was nun zunächst die ***Zahlenwerthe*** U_{2k} [Gleichung (40.)] anbelangt, so begegnet deren genauere Berechnung einigen Schwierigkeiten.

Während man zur Berechnung der Zahlenwerthe U_{2k+1} die bekannten Beziehungen hat

$$U_1 = \frac{\pi}{4}$$

und allgemein

$$U_{2k+1} = \frac{1}{2}\,\frac{E_k}{1.2.3\ldots 2k}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots),$$

worin für E_k die bezüglichen *Euler*schen Zahlen

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 5, \quad E_3 = 61, \quad E_4 = 1385, \ldots$$

einzusetzen sind, existiren meines Wissens keine einfacheren Beziehungen, welche zur Berechnung der Reihensummen U_{2k} dienen könnten. In den Lehrbüchern findet man keinerlei genauere Angaben in Betreff der Zahlenwerthe dieser in der Theorie der Vertheilung der Electricität auf zwei sich berührenden Kugeln mit Nutzen verwendbaren Reihensummen. Ich habe desshalb einige von diesen Zahlen nach verschiedenen Rechnungsmethoden bestimmt, nämlich die folgenden

$$U_2 = 0,\ 915\ 965\ 594\ 177\ 22$$
$$U_4 = 0,\ 988\ 944\ 551\ 741\ 10$$
$$U_6 = 0,\ 998\ 685\ 222\ 218\ 44$$
$$U_8 = 0,\ 999\ 849\ 990\ 246\ 829\ 7.$$

Ist man im Besitz dieser Zahlen U_{2k}, so bietet die Ermittelung entsprechender Zahlen $U_{2k,2n}$ bezw. $U'_{2k,2n}$ [Gleichungen (41.) und (44.)] keine Schwierigkeiten mehr. Um die numerischen Berechnungen zu erleichtern, wurden denn auch für eine Reihe von Indices ($n = 2, 4, 8, 12$) die in Gleichung (45.) vorkommenden Coefficienten $U'_{2,2n}$, $U'_{4,2n}$, $U'_{6,2n}$ und $U'_{8,2n}$ berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt. Von Interesse bei den Berechnungen sind die jeweiligen Verhältnisse $\frac{G_k}{G_{k+1}}$, welche der Gleichung (46.) gemäss

$$\frac{G_k}{G_{k+1}} = 10^4 \frac{U'_{2k,\,2n}}{U'_{2k+2,\,2n}} : \tau$$

in die Tabelle mit aufgenommen wurden.

Tabelle der Werthe $U'_{2k,\,2n}$.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$n = 2$	0, 007 484 868 6	1, 600 858 22	274, 535 751	42 664, 193
$\frac{G_k}{G_{k+1}} =$	$\frac{46,8}{\tau}$	$\frac{58,3}{\tau}$	$\frac{64,3}{\tau}$	$\frac{68,2}{\tau}$
$n = 4$	0, 001 930 937 0	0, 110 246 15	5, 175 649 7	224, 046 91
$\frac{G_k}{G_{k+1}} =$	$\frac{175,1}{\tau}$	$\frac{213,0}{\tau}$	$\frac{231,0}{\tau}$	$\frac{242,2}{\tau}$
$n = 8$	0, 000 486 862 2	0, 007 083 87	0, 085 571 3	0, 961 26
$\frac{G_k}{G_{k+1}} =$	$\frac{687,3}{\tau}$	$\frac{827,8}{\tau}$	$\frac{890,2}{\tau}$	$\frac{926,4}{\tau}$
$n = 12$	0, 000 216 732 2	0, 001 406 77	0, 007 594 5	0, 038 22
$\frac{G_k}{G_{k+1}} =$	$\frac{1540,6}{\tau}$	$\frac{1852,4}{\tau}$	$\frac{1987,1}{\tau}$	$\frac{2064,6}{\tau}$

Die Anwendung der Tabelle möge an einem Beispiel erläutert werden. Es sei für den Punkt $\mu = \cos\vartheta = \frac{1}{2}$ d. h. für $\vartheta = 60^{0}$ der Werth $\frac{4\pi ah}{A}$ zu berechnen; man findet dann

$$\lambda = \frac{1}{2}(1+\mu) = \frac{3}{4}, \quad \tau = \frac{\lambda}{1-\lambda} = 3.$$

Es genügt für diesen Fall, wenn $n = 2$ angenommen wird.

Man hat dann zunächst nach (35.)

$$W_{2n} = \frac{1}{(1^2+3)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{(3^2+3)^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{(5^2+3)^{\frac{3}{2}}} - \frac{7}{(7^2+3)^{\frac{3}{2}}}$$

oder auch, wie man leicht findet,

$$W_{2n} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{5}{49}\sqrt{7} - \frac{7}{169}\sqrt{13}\right),$$

woraus sich berechnet

$$W_{2n} = 0,067\,910\,249.$$

Ferner hat man nach Gleichung (45.), bei Benutzung der in obiger Tabelle für $n = 2$ enthaltenen Coefficienten $U_{2k,4}$

$$\frac{4\pi ah}{A(1+3)^{\frac{3}{2}}} = \begin{array}{llll} 0,067\,910\,249 & & -1,600\,858\cdot 0,0003 & (G_4) \\ +0,007\,484\,869 & (G_1) & -42\,664,19\cdot 0,0003^3 & (G_4) \\ +274,535\,75\cdot 0,0003^2 & (G_2) & -\cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

Bei den Gliedern G dieser Reihe wurde die jeweilige Bezeichnung des Gliedes in Klammern hinzugefügt. Will man nun ein Urtheil darüber gewinnen, in welchem Grade die Reihe convergirt, so braucht man nur die in der Tabelle für $n = 2$ angegebenen einfachen Ausdrücke $\frac{G_k}{G_{k+1}}$ zu berechnen. Man hat der Reihe nach

für

$$\frac{G_1}{G_2} \qquad \frac{G_2}{G_3} \qquad \frac{G_3}{G_4} \qquad \frac{G_4}{G_5}$$

die Werthe

$$\frac{46,8}{3} \qquad \frac{58,3}{3} \qquad \frac{64,3}{3} \qquad \frac{68,2}{3}$$

oder

$$15,6 \qquad 19,4 \qquad 21,4 \qquad 22,7;$$

schätzungsweise wird sein $\frac{G_5}{G_6} = 24$. Mit Benutzung der beiden letzten Verhältnisszahlen lassen sich, ohne besondere Rechnung, auch die Werthe der Reihenglieder G_5 und G_6 angeben, so dass man erhält

$$\frac{4\pi ah}{8A} = \begin{array}{llll} 0,067\,910\,249 & & -0,000\,480\,257 & (G_3) \\ +0,007\,484\,869 & (G_1) & -0,000\,001\,152 & (G_4) \\ +0,000\,024\,708 & (G_5) & -0,000\,000\,002 & (G_6) \\ +0,000\,000\,051 & (G_5) & & \end{array}$$

oder

$$\frac{4\pi ah}{8A} = 0,075\,419\,877 \qquad -0,000\,481\,411$$
$$= 0,074\,938\,466.$$

Es wird demnach der gesuchte Zahlenwerth

$$\frac{4\pi ah}{A} = 0,599\,507\,73.$$

In dieser Weise wurden für eine Reihe von Winkeln ϑ die Werthe $\frac{4\pi a h}{A}$ berechnet, die in der weiter unten folgenden Tabelle angegeben sind. Es gelingt nach dieser Methode den Werth $\frac{4\pi a h}{A}$ beispielsweise noch für $\mu = \cos\vartheta = \frac{31}{32}$ auf 6 Decimalstellen genau zu berechnen und zwar nur mit Benutzung der in der obigen kleinen Tabelle enthaltenen Zahlen. Wollte man in diesem Falle $\frac{4\pi a h}{A}$ direct nach Gleichung (29.) berechnen, so würde man selbst mit einem bedeutenden Aufwand von Rechnungsarbeit nicht einmal zu einer greifbar bestimmten Zahl gelangen.

Der hier (für den Specialfall zweier sich berührenden Kugeln von gleichem Radius) berechnete Quotient $\frac{4\pi a h}{A}$ steht in einer sehr einfachen Beziehung zu dem Verhältniss

$$\frac{h}{h_m},$$

in welchem h_m die ***mittlere electrische Dichtigkeit*** auf einer Kugel bedeutet.

Ist E die (auf beiden Kugeln gleiche) electrische Ladung, so hat man zunächst

$$h_m = \frac{E}{4\pi a^2}.$$

Ferner lässt sich das Potential A hier bekanntlich wie folgt ausdrücken

$$A = \frac{E}{a\log 2}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen E, so ergiebt sich

$$\frac{1}{h_m} = \frac{1}{\log 2} \frac{4\pi a}{A}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit h, so erhält man

$$\frac{h}{h_m} = \frac{1}{\log 2}\left(\frac{4\pi a h}{A}\right), \tag{47.}$$

eine Gleichung, nach welcher sich die Verhältnisse $\frac{h}{h_m}$ leicht berechnen lassen.

worin bedeuten

$$s_{2n} = (1-\xi^2)\frac{q^{2n}}{1-\xi^2 q^{4n}}, \qquad t_{2n} = \xi\frac{1-q^{4n}}{1-\xi^2 q^{4n}},$$

$$u_{2n} = \frac{1-\xi^2}{\xi}\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}}, \qquad v_{2n} = \xi\frac{1-\frac{q^{4n}}{\xi^2}}{1-q^{4n}}.$$

Je nachdem man nun die electrische Dichtigkeit für den inneren oder für den äusseren Centralpunkt der Kugel K_1 bestimmen will, hat man in obiger Gleichung $\mu = \pm 1$ zu setzen, so dass die Beziehungen entstehen

$$4\pi a h = A\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} s_{2n}\frac{1\pm t_{2n}}{(1\mp t_{2n})^2}\right] - B\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}\frac{1\pm v_{2n}}{(1\mp v_{2n})^2}.$$

Von diesen beiden Gleichungen erhält man offenbar aus der einen die andere, wenn man t_{2n} und v_{2n} bezw. mit $-t_{2n}$ und $-v_{2n}$ vertauscht, oder auch, wie sich mit Berücksichtigung der oben angeführten Ausdrücke für s_{2n}, t_{2n}, u_{2n}, v_{2n} leicht ergiebt, wenn man ξ mit $-\xi$, B mit $-B$ vertauscht.

Die Gleichung für den äusseren Centralpunkt ($\mu = -1$, $\lambda = 0$) ergiebt sich unmittelbar aus (17.); es ist für denselben

$$(48.)\quad \begin{cases} 4\pi a h = A\left[1+\frac{(1-\xi)^2}{1+\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\xi q^{4n}}{(1-\xi q^{4n})^2}q^{2n}\right] \\ \qquad\qquad -B\frac{(1-\xi)^2}{1+\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{q^{4n}}{\xi}}{\left(1-\frac{q^{4n}}{\xi}\right)^2}\frac{q^{2n}}{\xi}. \end{cases}$$

Die Gleichung für den inneren Centralpunkt muss daher sein

$$(49.)\quad \begin{cases} 4\pi a h = A\left[1+\frac{(1+\xi)^2}{1-\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\xi q^{4n}}{(1+\xi q^{4n})^2}q^{2n}\right] \\ \qquad\qquad -B\frac{(1+\xi)^2}{1-\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\frac{q^{4n}}{\xi}}{\left(1+\frac{q^{4n}}{\xi}\right)^2}\frac{q^{2n}}{\xi}. \end{cases}$$

Ist $A = B$, so kann man einfacher schreiben

$$(50.)\quad \frac{4\pi a h}{A} = \frac{(1\pm\xi)^2}{1\mp\xi}\left[\frac{1\mp\xi}{(1\pm\xi)^2} - \frac{1\mp\frac{q^4}{\xi}}{\left(1\pm\frac{q^4}{\xi}\right)^2}\frac{q^2}{\xi} + \frac{1\mp\xi q^4}{(1\pm\xi q^4)^2}q^2 - \cdots\right].$$

In dieser und in der folgenden Gleichung sind die oberen oder die unteren Zeichen anzunehmen, je nachdem der innere oder der äussere Centralpunkt

in Betracht kommt. Eliminirt man aus den S. 158 angeführten Gleichungen zur Berechnung von q^2 die Grösse c, so erhält man die Beziehung

$$\frac{q^2}{\xi^2} = \frac{aq^2+b}{bq^2+a}.$$

Für gleich grosse Kugeln ($a = b$) ist also $\xi = q$ und Gleichung (50.) geht über in

$$(51.) \quad \frac{4\pi ah}{A} = \frac{(1\pm q)^2}{1\mp q}\left[\frac{1\mp q}{(1\pm q)^2} - \frac{1\mp q^3}{(1\pm q^3)^2}\,q + \frac{1\mp q^5}{(1\pm q^5)^2}\,q^2 - \cdots\right],$$

eine zu Berechnungszwecken ganz brauchbare Reihe, welche sich meines Wissens in den Lehrbüchern nirgends angegeben findet. Die von ***Kirchhoff*** für die gleichen Specialfälle entwickelten Reihen sind wesentlich complicirteren Baues.

Ueber rationale Functionen bilinearer Formen.

(Von Herrn *P. Muth* in Osthofen).

Die folgenden Ausführungen fussen auf der in Artikel II gegebenen Darstellung einer ganzen Function einer irreducibelen (elementaren) bilinearen Form mit contragredienten Variablen, welche die *Weierstrass*sche Normalform besitzt. Zunächst gestattet dieselbe, *zwei fundamentale Theoreme der Formentheorie* sehr einfach neu abzuleiten (Artikel III); dieselben werden in Artikel IV *verallgemeinert* werden. Dann werde ich die genannte Darstellung benutzen, um die Aufgabe zu lösen, *die Elementartheiler der charakteristischen Determinante einer rationalen Function einer bilinearen Form zu bestimmen, wenn die Elementartheiler der charakteristischen Determinante der bilinearen Form bekannt sind*, was nicht nur rein theoretisch von Interesse, sondern auch für die geometrische Anwendung der Formentheorie im Gebiete der Collineationen unentbehrlich ist (Artikel V—VII.)

Wiederholt wende ich ein Princip an, von welchem Herr *Frobenius* in seinen Arbeiten über bilineare Formen häufig Gebrauch gemacht hat. Ich habe versucht, demselben eine Fassung zu geben, welche die *grösstmögliche Allgemeinheit* besitzt (Artikel I).

I. Sind $U, V, W, \dots, Z$ bilineare Formen von je $2n$ Variablen x_i, u_k und $x, y, z, \dots, t$ unabhängige Variable, so sei H eine ganze Function aller dieser Formen und Variablen, also entweder selbst eine bilineare Form, oder auch, in dem Falle, wo $U, V, W, \dots, Z$ in H nicht vorkommen, einfach eine ganze Function der Variablen $x, y, z, \dots, t$*). Es bestehe nun für beliebige Werthe

*) Ueber symbolisches Rechnen mit bilinearen Formen vergl. § 2 meines Buches „Theorie und Anwendung der Elementartheiler" Leipzig 1899 (Im Folgenden citirt mit *E T.*)

von $x, y, z, \dots, t$ bezw. für beliebige Werthe dieser Variablen und der Variablen x_i, u_k die Gleichung

$$H = 0.$$

„Setzt man in dieser Gleichung für eine der Unbestimmten $x, y, z, \dots, t$, etwa für x, eine Form A von $2n$ Variablen x_i, u_k, welche mit jeder der Formen $U, V, W, \dots, Z$ vertauschbar ist, oder, wenn H nur von den $x, y, z, \dots, t$ abhängt, eine beliebige Form A, so erhält man wieder eine richtige Gleichung."

Wir bringen, um dies zu beweisen, die Form oder Function H, die in x vom Grade μ sei, durch ganze Operationen auf die Gestalt

$$(1.)\qquad x^0 H_0 + x^1 H_1 + \dots + x^\mu H_\mu,$$

wo $H_0, H_1, \dots, H_\mu$ wieder Functionen (bezw. Constante) oder Formen der oben definirten Art vorstellen, die aber von x unabhängig sind. Dabei ist bei der Bildung symbolischer Producte auf die Stellung der Formen $U, V, W, \dots, Z$ genau zu achten. Da der Ausdruck (1.) für beliebige Werthe von x Null ist, so muss

$$H_0 = H_1 = \dots = H_\mu = 0$$

sein; daher ist auch die Form

$$(2.)\qquad A^0 H_0 + A^1 H_1 + \dots + A^\mu H_\mu$$

gleich Null.

Jetzt denken wir uns in H

$$x = A\ (x^0 = A^0 = E = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n)$$

gesetzt, wodurch H in die *Form* K übergehe. Dann können wir stets, da nach Voraussetzung A mit $U, V, W, \dots, Z$, also auch jede Potenz von A mit jeder ganzen Function von $U, V, W, \dots, Z$ vertauschbar ist, durch ganze Operationen, die denjenigen völlig analog sind, durch welche H in (1.) übergeführt wurde, die Form K auf die Gestalt (2.) bringen. Daher ist $K = 0$, w. z. b. w.

Setzt man in der Gleichung $K = 0$ für y eine mit A bezw. mit $A, U, V, W, \dots, Z$ vertauschbare Form B, so erhält man nach dem eben Gezeigten wieder eine richtige Gleichung. U. s. w. Also:

Aus der Gleichung $H = 0$ geht dadurch eine richtige Gleichung hervor, dass man in ihr für beliebig viele der Unbestimmten $x, y, z, \dots, t$ Formen $A, B, C, \dots$ setzt, die zu je zweien unter sich, und falls H nicht nur von

*$x, y, z, \ldots, t$ abhängt, sämmtlich mit den Formen $U, V, W, \ldots, Z$ vertauschbar sind.**)

II. Es sei eine ganze Function m-ten Grades der Variablen r

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_m r^m$$

gegeben. Dann ist bekanntlich, wenn $\frac{d^{(k)} f(r)}{dr^k} = f^{(k)}(r)$ gesetzt wird,

$$f(x+y) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} y + \frac{f''(x)}{2!} y^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(x)}{m!} y^m$$

für beliebige Werthe von x und y. Bedeuten daher A und B vertauschbare Formen, so ist nach Art. I

$$(3.) \quad f(A+B) = f(A) + \frac{f'(A)}{1!} B + \frac{f''(A)}{2!} B^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(A)}{m!} B^m.$$

Wir setzen nun in (3.), was erlaubt ist,

$$A = cE = c u_x, \quad B = x_1 u_2 + x_2 u_3 + \cdots + x_{n-1} u_n \qquad (n > 1),$$

wo c eine Constante bedeute. Da hier

$$f(A) = f(c) u_x, \; f'(A) = f'(c) u_x, \cdots, \; f^{(m)}(A) = f^{(m)}(c) u_x$$

und

$$B^2 = x_1 u_3 + x_2 u_4 + \cdots + x_{n-2} u_n, \quad B^3 = x_1 u_4 + x_2 u_5 + \cdots + x_{n-3} u_n,$$
$$\ldots\ldots, \quad B^{n-1} = x_1 u_n, \quad B^n = 0$$

ist, so erhalten wir, wenn wir noch

$$c u_x + (x_1 u_2 + x_2 u_3 + \cdots + x_{n-1} u_n) = A + B = J$$

setzen, die Gleichung

$$(4.) \quad \begin{cases} f(J) = f(c) u_x + \frac{f'(c)}{1!} (x_1 u_2 + x_2 u_3 + \cdots + x_{n-1} u_n) \\ \quad + \frac{f''(c)}{2!} (x_1 u_3 + x_2 u_4 + \cdots + x_{n-2} u_n) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} x_1 u_n, \end{cases}$$

die für jedes $m \gtreqless n$ gilt. Bei $n-1$ denken wir uns die eingeklammerten Ausdrücke in J und in (4.) rechts Null gesetzt.

Sind x_i, u_k contragrediente Veränderliche, so ist J eine irreducibele bilineare Form dieser Variablen [*ET* S. 153]. Ist A eine andere elementare Form der x_i, u_k und ihre charakteristische Determinante $|rE - A| = (r-c)^n$,

*) Man vergl. zu diesem Artikel: *Frobenius*, Ueber vertauschbare Matrizen, Sitzb. der Berl. Akad. (1896), S. 601 ff., § 1.

so sind A und J ähnliche Formen [*ET* Art. 77]; aber auch die Formen $f(A)$ und $f(J)$ sind ähnlich.*) Also:

Ist $f(A)$ eine ganze Function einer elementaren Form A von $2n$ contragredienten Variablen mit der charakteristischen Determinante

$$|rE-A| = (r-c)^n,$$

so ist $f(A)$ ähnlich zur Form (4.)

III. Die Form $f(A)$ ***ist dann und nur dann (identisch) Null,*** wenn $f(J) = 0$ ist, wenn also

$$f(c) = f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0 \qquad (f^{(0)}(c) = f(c))$$

ist, d. h., ***wenn $f(r)$ durch $(r-c)^n$ theilbar ist.***

Es sei nun B eine beliebige Form von $2n$ Variablen und, als Product ihrer Elementartheiler geschrieben, die Determinante

$$\varphi(r) = |rE-B| = (r-a)^\alpha (r-a)^{\alpha'} \dots (r-b)^\beta (r-b)^{\beta'} \dots,$$

wobei

$$(5.) \qquad \alpha \geqq \alpha' \geqq \dots, \qquad \beta \geqq \beta' \geqq \dots, \dots$$

vorausgesetzt werden darf. B ist einer reducirten Form

$$R = J_a^{(\alpha)} + J_a^{(\alpha')} + \cdots + J_b^{(\beta)} + J_b^{(\beta')} + \cdots$$

ähnlich, wo $J_a^{(\alpha)}$ eine elementare Form von 2α Variablen vorstellt, deren charakteristische Determinante gleich $(r-a)^\alpha$ ist, und Analoges von

$$J_a^{(\alpha')}, \dots, J_b^{(\beta)}, J_b^{(\beta')}, \dots$$

gilt [*ET* Art. 77].

Eine ganze Function $\chi(B)$ von B ist bekanntlich**) ähnlich zur Form

$$(6.) \qquad \chi(R) = \chi(J_a^{(\alpha)}) + \chi(J_a^{(\alpha')}) + \cdots + \chi(J_b^{(\beta)}) + \chi(J_b^{(\beta')}) + \cdots.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\chi(B) = 0$ sei, besteht darin, dass $\chi(R) = 0$ ist, was dann und nur dann eintritt, wenn die einzelnen Theile der zerlegbaren Form $\chi(R)$ für sich Null sind. Nun sind aber die Formen $\chi(J_a^{(\alpha)})$, $\chi(J_a^{(\alpha')})$... nach dem eben Gezeigten mit Rücksicht auf (5.) dann und nur dann Null, wenn $\chi(r)$ durch $(r-a)^\alpha$ theilbar ist. Analoges gilt für die Theilformen $\chi(J_b^{(\beta)})$, $\chi(J_b^{(\beta')})$, ... u. s. w. Die Form $\chi(B)$ ist demnach dann und nur dann Null, wenn $\chi(r)$ durch $(r-a)^\alpha$, $(r-b)^\beta$, ..., also durch

$$\psi(r) = (r-a)^\alpha (r-b)^\beta \dots$$

*) *Frobenius*, dieses Journal (1878), Bd. 84, S. 23.

**) *Frobenius*, l. c. S. 19 u. 23.

theilbar ist; $\psi(r)$ ist der n-te Elementartheiler der Determinante $|rE-B|$. Daher gilt der Satz von *Frobenius:*

„Ist $\psi(r)$ der n-te Elementartheiler der charakteristischen Determinante einer Form B von $2n$ Variablen, so ist $\psi(B)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, welcher die Form B genügt, und ist $\chi(B)=0$ eine andere Gleichung, der B genügt, so ist $\chi(r)$ durch $\psi(r)$ theilbar".

Da $\varphi(r)$ durch $\psi(r)$ theilbar ist, so ist $\varphi(B)=0$. Also:

„Ist die charakteristische Determinante $|rE-B|$ von B gleich $\varphi(r)$, so ist $\varphi(B)=0$".*)

IV. A und B seien *vertauschbare* bilineare Formen von je $2n$ Variablen, die Determinante $|xA+yB|=\varphi(x,y)$ der Formenschar $xA+yB$ sei nicht identisch Null und

$$\psi(x,y)=a_0x^p+a_1x^{p-1}y+\cdots+a_py^p$$

der n-te Elementartheiler von $|xA+yB|$.

Wir wollen zunächst annehmen, dass die Determinanten $|A|$ und $|B|$ nicht beide Null seien, und dass etwa $|A|\neq 0$ sei. Dann ist der Coefficient $a_0\neq 0$.

Da symbolisch

$$xA+yB=\left(xE+y\frac{B}{A}\right)A$$

ist, so sind die Scharen $xA+yB$ und $xE+y\frac{B}{A}$ äquivalent, und $\psi(x,y)$ ist somit auch der n-te Elementartheiler von $\left|xE+y\frac{B}{A}\right|$. Der n-te Elementartheiler von $\left|xE-\frac{B}{A}\right|$ ist daher gleich $\psi(x,-1)$, folglich nach III

$$a_0\left(\frac{B}{A}\right)^p-a_1\left(\frac{B}{A}\right)^{p-1}+\cdots\pm a_p\left(\frac{B}{A}\right)^0=0,$$

woraus sich durch Multiplication mit A^p *die Gleichung*

$$\psi(B,-A)=0$$

ergiebt.

Angenommen, es sei

$$\chi(x,y)=b_0x^q+b_1x^{q-1}y+\cdots+b_qy^q$$

*) Die Litteratur über diese Sätze findet man *Encykl. der math. Wiss.* Bd. I, S. 171 u. 172.

und $\chi(B,-A) = 0$. Dann folgt hieraus durch Division mit A^q

$$b_0\left(\frac{B}{A}\right)^q - b_1\left(\frac{B}{A}\right)^{q-1} + \cdots \pm b_q\left(\frac{B}{A}\right)^0 = 0.$$

Also ist nach III $\chi(x,-1)$ durch $\psi(x,-1)$ theilbar. Da aber $a_0 \neq 0$ ist, muss auch $\chi(x,-y)$ durch $\psi(x,-y)$, *$\chi(x,y)$ durch $\psi(x,y)$ theilbar sein.*

Es seien jetzt die Determinanten $|A|$ *und* $|B|$ Null. Wir setzen

$$(7.)\qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', & \Delta x' = \delta x - \beta y, \\ y = \gamma x' + \delta y', & \Delta y' = -\gamma x + \alpha y, \end{cases}$$

wo $\Delta = (\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$ sei und α, γ so gewählt seien, dass $|\alpha A + \gamma B| \neq 0$ ist. Dann wird

$$xA + yB = (\alpha A + \gamma B)x' + (\beta A + \delta B)y' = A'x' + B'y'.$$

Geht durch die Substitution (7.) $\psi(x,y)$ in

$$\psi'(x',y') = a'_0 x'^p + a'_1 x'^{p-1} y' + \cdots + a'_p y'^p$$

über, so stellt $\psi'(x',y')$ den n-ten Elementartheiler von $|x'A' + y'B'|$ vor [*ET* Art. 37]. Da A' und B' vertauschbare Formen sind und $|A'|$ nicht Null ist, hat man daher nach Vorstehendem die Gleichung

$$(8.)\qquad \psi'(B',-A') = 0.$$

Nun ist aber identisch

$$\Delta^p(a_0x^p + a_1x^{p-1}y + \cdots + a_py^p) = a'_0(\delta x - \beta y)^p + a'_1(\delta x - \beta y)^{p-1}(-\gamma x + \alpha y) + \cdots + a'_p(-\gamma x + \alpha y)^p.$$

Aus dieser Gleichung geht eine richtige Gleichung hervor, wenn man $x = B$, $y = -A$ setzt (I); es ist also mit Rücksicht auf Gleichung (8.)

$$(9.)\qquad \Delta^p\psi(B,-A) = \psi'(B',-A') = 0,$$

mithin

$$\psi(B,-A) = 0.$$

Es sei nun, wie oben, $\chi(B,-A) = 0$. Geht $\chi(x,y)$ durch die Substitution (7.) in $\chi'(x',y')$ über, so beweist man, wie vorhin die Gleichung (9.), die Gleichung

$$\Delta^q\chi(B,-A) = \chi'(B',-A').$$

Aus $\chi(B,-A) = 0$ folgt daher $\chi'(B',-A') = 0$ und hieraus nach Obigem die Theilbarkeit von $\chi'(x',y')$ durch $\psi'(x',y')$; hieraus endlich, dass $\chi(x,y)$ durch $\psi(x,y)$ theilbar ist. Also:

„Ist $\psi(x,y)$ der n-te Elementartheiler der Determinante

$$|xA + yB| = \varphi(x,y)$$

einer ordinären Schar bilinearer Formen $xA+yB$, deren Grundformen

$$A = \Sigma a_{ik} x_i u_k,\ B = \Sigma b_{ik} x_i u_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

vertauschbare Formen sind, so ist

$$\psi(B, -A) = 0$$

die homogene Gleichung niedrigsten Grades, welcher die Formen $B, -A$ genügen, und ist $\chi(x, y)$ eine binäre Form derart, dass $\chi(B, -A) = 0$ ist, so ist $\chi(x, y)$ durch $\psi(x, y)$ theilbar."

Da $\varphi(x, y)$ durch $\psi(x, y)$ theilbar, also etwa $\varphi(x, y) = \vartheta(x, y)\,\psi(x, y)$ ist, so hat man (I)

$$\varphi(B, -A) = \vartheta(B, -A)\,\psi(B, -A) = 0.$$

Sind die Formen A, B vertauschbar, und ist $|xA+yB| = \varphi(x, y)$, so ist stets

$$\varphi(B, -A) = 0.$$

Dieser Satz lässt sich sehr einfach *direct* beweisen. Wendet man nämlich den letzten Satz in III auf die Form $xA+yB$ an, so ergiebt sich eine Gleichung

$$(xA+yB)^n - c_1(xA+yB)^{n-1} + c_2(xA+yB)^{n-2} - \cdots \pm \varphi(x, y)\,E = 0,$$

wo c_i eine homogene ganze Function i-ten Grades von x, y vorstellt. Hieraus aber folgt sofort für $x = B$, $y = -A$ (I)

$$\varphi(B, -A) = 0.\text{*)}$$

V. Von jetzt ab bedeute $f(J) = \frac{g(J)}{h(J)}$ eine *rationale* Function der elementaren Form J in Artikel II. Bekanntlich ist $f(J)$ gleich einer ganzen Function $F(J)$ von J, wobei

$$F(c) = f(c),\ F'(c) = f'(c), \dots F^{(n-1)}(c) = f^{(n-1)}(c)$$

ist.**) Somit hat man nach (4.)

$$f(J) = F(J) = F(c)\,u_x + \frac{F'(c)}{1!}(x_1 u_2 + \cdots) + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}\,x_1 u_n$$

$$= f(c)\,u_x + \frac{f'(c)}{1!}(x_1 u_2 + \cdots) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}\,x_1 u_n.$$

---

*) Ist $AB = BA$, $B^p = 0\ (p \leqq n)$, aber $B^{p-1} \neq 0$, so ist nach Obigem, wenn $\varphi(x, y) \neq 0$ ist, $\psi(x, y) = x^p$, $\varphi(x, y) = |xA + yB| = \text{const.}\ x^n = |A|\,x^n$, $|A+B| = |A|$. Vergl. *Frobenius*, a. in I. c. O., § 2.

**) *Frobenius*, dies. Journ. (1878), Bd. 84, S. 13.

Die Formel (4.) *gilt also auch für eine rationale Function* $f(J)$ *von* J.*) Ebenso bleibt das am Schlusse von Artikel II Gesagte bestehen, wenn $f(A)$ eine *rationale* Function einer elementaren Form A und $|rE-A| = (r-c)^n$ ist.

VI. Bedeutet A die eben erwähnte elementare Form, so stimmen, da $f(A)$ und $f(J) = f(c)\,u_x + \frac{f'(c)}{1!}(x_1 u_2 + \cdots) + \cdots$ ähnliche Formen sind, die Elementartheiler von $|rE-f(A)|$ und $|rE-f(J)|$ überein. *Wir wollen jetzt die Elementartheiler der Determinante* $|rE-f(J)| = S$ *bestimmen.*

Ist $n = 1$, also $f(J) = f(c)\,u_x$, so hat S den Elementartheiler $r-f(c)$. Ist $n > 1$ und zunächst $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$, so besitzt, wie ohne weiteres klar ist, S den Elementartheiler $r-f(c)$ n-mal. Wir wollen endlich annehmen, dass $n > 1$ und

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0,$$

aber

$$f^{(k)}(c) \neq 0$$

sei, für $k \leqq n-1$.**) Wir setzen dann abkürzend

$$r-f(c) = L, \quad -\frac{f^{(\varrho)}(c)}{\varrho!} = a_\varrho$$

und denken uns das System $\mathfrak{S}$ der Determinante S so geschrieben, dass links von der (Haupt-) Diagonale lauter Elemente Null stehen. Die k ersten Elemente der Diagonale wollen wir vorübergehend mit $L_1, L_2, \ldots L_k$ bezeichnen. Ferner verstehen wir unter Z_ϱ (S_ϱ) die ϱ-te Zeile (Spalte) eines Systems.

Nun vertauschen wir in $\mathfrak{S}$ die S_1 und S_{k+1}, multipliciren bei $k \leqq n-2$ die S_1 des neuen Systems mit $\frac{L_1}{a_k}, \frac{a_{k+2}}{a_k}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_k}$ und subtrahiren sie dann der Reihe nach von der $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots S_n$; hierauf multipliciren wir die Z_{k+2} mit $\frac{a_{k+1}}{a_k}$, die Z_{k+3} mit $\frac{a_{k+2}}{a_k}, \ldots$, die Z_n mit $\frac{a_{n-1}}{a_k}$ und addiren jedesmal zur Z_{k+1}. Ist aber $k = n-1$, so subtrahiren wir nur die mit $\frac{L_1}{a_{n-1}}$ vervielfachte S_1 von der S_n. Subtrahiren wir in dem so erhaltenen System die mit $\frac{L}{a_k}$ vervielfachte

*) Vergl. hier und im Folgenden: *Bromwich*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., Bd. XI, S. 86—89. [Zusatz bei der Korrektur.]

**) Es sei also $f'(c) \neq 0$, oder $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$ u. s. w.

Z_1 von der Z_{k+1} und multipliciren hierauf die S_1 mit $\frac{1}{a_k}$, die S_{k+1} mit $-a_k$, so gelangen wir zu einem System $\mathfrak{S}'$, welches sich von $\mathfrak{S}$ nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle des ersten Diagonalements das Element 1 getreten ist, während alle andern Elemente der Z_1 Null wurden, dass ferner an Stelle der Elemente $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots a_{n-k-1}$ der Z_{k+1} von $\mathfrak{S}$, soweit dieselben vorhanden waren bezw. sich geändert haben, neue *von r unabhängige* Elemente getreten sind, und dass schliesslich an Stelle des $(k+1)$-ten Diagonalelements L das Element $L_1 L$ getreten ist. *Die eben beschriebene Veränderung der Elemente von $\mathfrak{S}$ tritt offenbar auch dann ein, wenn $L_1, L_2, \dots L_k$ nicht dieselbe lineare Function L von r, sondern ganz beliebige Functionen von r vorstellen.*

Ist $\mathfrak{S}'$ kein Diagonalsystem, so kann das erste innere System von $\mathfrak{S}'$ analog behandelt werden, wie eben das System $\mathfrak{S}$. Dabei bleiben die Z_1 und S_1 von $\mathfrak{S}'$ ungeändert. Setzen wir dieses Verfahren fort, so gelangen wir zu einem System $\mathfrak{S}^{(n-k)}$, das nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente besitzt. Diese sind aber leicht anzugeben. Bedeuten nämlich ϱ, σ positive ganze Zahlen bezw. Null, und ist

$$n = \varrho k + \sigma (\sigma < k),$$

so standen ursprünglich in der Diagonale die Elemente

$$\underbrace{L, L, \dots, L}_{k};\ \underbrace{L, L, \dots, L}_{k};\ \dots;\ \underbrace{L, L, \dots, L}_{k};\ \underbrace{L, L, \dots, L}_{\sigma}, \quad \text{Elemente}$$

und zwar ϱ-mal je k Elemente L. Nach der 1-ten, 2-ten, ..., k-ten Umformung von $\mathfrak{S}$ bezw. in $\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \dots, \mathfrak{S}^{(k)}$ stehen in der Diagonale die Elemente

$$\begin{array}{l} 1, L, \quad \dots, L;\ L^2, L, \quad \dots, L;\ L, \dots\dots;\ L, L, \dots, L;\ L, L, \dots, L, \\ 1, 1, L, \dots, L;\ L^2, L^2, L, \dots, L;\ L, \dots\dots;\ L, L, \dots, L;\ L, L, \dots, L, \\ \cdot \\ 1, 1, \quad \dots, 1;\ L^2, L^2, \quad \dots, L^2;\ L, \dots\dots;\ L, L, \dots, L;\ L, L, \dots, L, \end{array}$$

nach $(\varrho-1)k$ Umformungen die Elemente

$$1, 1, \dots, 1;\ 1, 1, \dots, 1;\ 1, \dots\dots, 1;\ L^\varrho, L^\varrho, \dots, L^\varrho;\ L, L, \dots, L,$$

endlich nach den σ übrigen Umformungen bei $\sigma > 0$ die Elemente

$$1, 1, \dots, 1;\ 1, 1, \dots, 1;\ 1, \dots\dots, 1;\ \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\sigma},\ \underbrace{L^\varrho, L^\varrho, \dots, L^\varrho}_{k-\sigma};\ \underbrace{L^{\varrho+1}, L^{\varrho+1}, \dots, L^{\varrho+1}}_{\sigma}.$$

$\chi = f$ gilt, *so erhält man die Elementartheiler von* $|rE - f(B)|$, *indem man diejenigen der charakteristischen Determinanten von*

$$f(J_a^{(\alpha)}),\ f(J_a^{(\alpha')}),\ldots,f(J_b^{(\beta)}),\ f(J_b^{(\beta')}),\ldots,$$

welche nach dem vorigen Artikel bestimmt werden könnnen, zusammennimmt [*ET* S. 56 u. 58].

Verschwindet $f'(r)$ für keinen Werth, für welchen ein nicht linearer Elementartheiler von $|rE - B|$ Null ist, so sind nach dem zu Anfang des Artikels hervorgehobenen Satze von *Frobenius* die Formen $f(J_a^{(\alpha)})$ u. s. w. sämmtlich *irreducibel*, $f(R)$ ist dann eine *reducirte Form und*

$$(r-f(a))^{\alpha},\ (r-f(a))^{\alpha'},\ldots,(r-f(b))^{\beta},\ (r-f(b))^{\beta'},\ldots$$

sind die Elementartheiler von $|rE - f(B)|$. Diese Folgerung hat Herr *Frobenius* l. c. S. 25 in Satz V gezogen.

Arithmetischer Beweis eines Satzes über den Grad der Eliminante zweier ganzen Functionen zweier Veränderlichen.

(Von Herrn *Heinrich Jung* in Marburg a. d. L.)

Es seien

$$f(x, y) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

und

$$g(x, y) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

zwei ganze Functionen von x und y vom Grade m und n und es sei $m \geqq n$. Es seien also die Coefficienten a_λ und b_λ ganze Functionen von y höchstens vom Grade λ. Wir wollen voraussetzen, dass die Glieder mit x^m, y^m in f und mit x^n, y^n in g wirklich vorkommen. Wir können dies durch eine lineare Transformation immer erreichen. Die Eliminante von f und g können wir in Form einer Determinante $(m+n)$-ter Ordnung so schreiben

$$\begin{array}{l} n \text{ Zeilen} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ m \text{ Zeilen} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = R.$$

Wir wollen den Grad dieser Determinante in y bestimmen unter der Voraussetzung, dass die Functionen u und v, die aus den Gliedern der höchsten Dimension in f und g bestehen einen gemeinsamen Theiler μ-ten Grades haben.

Es sei allgemein das Glied der höchsten Dimension in a_λ und b_λ gleich $A_\lambda y^\lambda$ und $B_\lambda y^\lambda$, so dass also

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} y + \cdots + A_m y^m$$
$$v = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} y + \cdots + B_n y^n,$$

wo nach unserer Annahme A_0, A_m, B_0, B_n nicht Null sind. Die Resultante von u und v ist, u und v als Functionen von x betrachtet,

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 y & \cdots & A_m & y^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_0 & \cdots & A_{m-1} & y^{m-1}, & A_m y^m & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_0 & B_1 y & \cdots & B_n & y^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_0 & \cdots & B_{n-1} & y^{n-1}, & B_n y^n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = S.$$

Sie geht aus R hervor dadurch, dass man a_λ, b_λ durch $A_\lambda y^\lambda$, $B_\lambda y^\lambda$ ersetzt. Die Voraussetzung, dass u und v einen gemeinsamen Theiler μ-ten Grades haben, können wir so aussprechen. Man kann in S durch solche Umformungen, die den Werth einer Determinante nicht ändern, in μ Zeilen alle Elemente zu Null machen.

Nämlich: Es sei χ der gemeinsame Theiler μ-ten Grades von u und v und etwa

$$u = \chi \cdot \varphi,$$
$$v = \chi \cdot \psi.$$

Dann ist identisch

$$(1.) \qquad u\psi - v\varphi = 0.$$

Hierin sind ψ und φ ganze homogene Functionen von x und y vom Grade $n-\mu$ und $m-\mu$, in denen nach unserer Annahme die Glieder mit der höchsten Potenz x und der höchsten Potenz y wirklich vorkommen.

Multipliciren wir nun die Gleichung (1.) mit irgend einer homogenen Function $(\mu-\alpha)$-ten Grades von x und y, in der auch die Glieder mit $x^{\mu-\alpha}$ und $y^{\mu-\alpha}$ wirklich vorkommen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Haben u und v einen gemeinsamen Theiler μ-ten Grades, so lassen sich für $\alpha \leqq \mu$ stets zwei homogene Functionen ψ_α und φ_α von x und y vom Grade $n-\alpha$ und $m-\alpha$ so bestimmen, dass identisch

$$(2.) \qquad u\psi_\alpha + v\varphi_\alpha = 0.$$

stehen jetzt an Stelle der in den μ Zeilen von R immer am Schluss auftretenden Nullen ganze Functionen von y. Es ist aber, wie man sich leicht überzeugt, für $\alpha \leqq \mu$ der Grad der in R_1 in der α-ten Zeile an $\varkappa$-ter Stelle stehenden Function gleich $\varkappa - \alpha - 1$ für $\varkappa \geqq \alpha + 1$, während für $\varkappa < \alpha + 1$ die die an $\varkappa$-ter Stelle stehende Function Null ist.

Wollen wir nun das Glied mit der höchsten Potenz von y in R_1 haben, so müssen wir in R_1 alle Elemente durch die in ihnen enthaltenen Glieder der höchsten Ordnung in y ersetzen. Dadurch erhalten wir eine Determinante S_1, die sich von S nur in den ersten μ Zeilen unterscheidet. Diese ersten μ Zeilen aber haben folgende Form

$$\begin{matrix} 0 & C_0^{(1)} & C_1^{(1)}\,y & C_2^{(1)}\,y^2 & & \cdots & C_{m+n-2}^{(1)} & y^{m+n-2} \\ 0 & 0 & C_0^{(2)} & C_1^{(2)}\,y & & \cdots & C_{m+n-3}^{(2)} & y^{m+n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\ C_0^{(\mu)} & \cdots & C_{m+n-\mu-1}^{(\mu)} & y^{m+n-\mu-1}. \end{matrix}$$

Multipliciren wir also in S_1 zunächst jede der ersten μ Zeilen mit y und dann die $m+n$ Zeilen der Reihe nach mit $y^0, y^1, \ldots, y^{n-1}, y^0, y^1, \ldots, y^{m-1}$, so können wir jetzt aus den Colonnen der Reihe nach die Factoren $y^0, y^1, \ldots, y^{m+n-1}$ vor die Determinante setzen. Die übrig bleibende Determinante enthält dann y nicht mehr. Da wir aber S_1 erst mit

$$y^{\mu + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}}$$

multiplicirt haben und dann den Factor

$$y^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}}$$

abgesondert haben, so enthält S_1 gerade den Factor

$$y^{\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \mu} = y^{mn-\mu},$$

Also: Sind $f(x, y)$ und $g(x, y)$ zwei ganze Functionen m-ten und n-ten Grades und haben die aus den Gliedern der höchsten Dimension von f und g gebildeten Functionen einen Factor μ-ten Grades gemeinsam, so ist der Grad der Eliminationsresultante von f und g höchstens gleich $mn - \mu$.

Legen wir dem Beweise die Darstellung der Eliminante in der Form einer Determinante m-ter Ordnung zu Grunde, so ist er in folgender Weise zu führen.

Es seien

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,$$
$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

zwei ganze Functionen von x und $m \geqq n$. Dann lässt sich die Resultante von f und g in der Form einer m-reihigen Determinante darstellen, etwa so

$$R = |A_{i\varkappa}|.$$

Dabei sind die $A_{i\varkappa}$ linear in den a und in den b und isobarisch vom Gewichte $n-m+i+\varkappa-1$. Die Determinante R ist aber in den a und b isobarisch vom Gewichte mn.

Es seien nun die a und b ganze Functionen einer zweiten Variabeln y und zwar a_λ und b_λ vom Grade λ. Dann werden auch die $A_{i\varkappa}$ ganze Functionen von y und zwar vom Grade $n-m+i+\varkappa-1$. Es sei das Glied höchster Ordnung von $A_{i\varkappa}$ gleich

$$B_{i\varkappa}\, y^{n-m+i+\varkappa-1}.$$

Die Determinante

$$S = |B_{i\varkappa}|$$

ist dann nichts anderes als die Resultante der Functionen u und v, die aus den Gliedern der höchsten Dimension in $f(x, y)$ und $g(x, y)$ bestehen. Haben nun u und v einen gemeinsamen Theiler μ-ten Grades, wie wir voraussetzen, so verschwinden in S alle Unterdeterminanten $(m-\mu+1)$-ter Ordnung, aber nicht alle $(m-\mu)$-ter Ordnung.

Wir formen nun die Determinante $R = |A_{i\varkappa}|$ in folgender Weise um. Wir addiren zur letzten Zeile die der Reihe nach mit

$$\lambda^{(1)}_{m-1} y^{m-1},\ \lambda^{(1)}_{m-2} y^{m-2},\ \ldots,\ \lambda^{(1)}_1 y$$

multiplicirten vorhergehenden Zeilen, dann zur zweitletzten Zeile die der Reihe nach mit

$$\lambda^{(2)}_{m-2} y^{m-2},\ \lambda^{(2)}_{m-3} y^{m-3},\ \ldots,\ \lambda^{(2)}_1 y$$

multiplicirten vorhergehenden Zeilen u. s. f.; endlich zur μ-tletzten Zeile die der Reihe nach mit

$$\lambda^{(\mu)}_{m-\mu} y^{m-\mu},\ \lambda^{(\mu)}_{m-\mu-1} y^{m-\mu-1},\ \ldots,\ \lambda^{(\mu)}_1 y$$

multiplicirten vorhergehenden Zeilen.

Dann lauten für $\alpha = 1, \ldots, \mu$, die Glieder höchster Ordnung der Elemente der $(m-\alpha+1)$-ten Zeile

$$y^{n+i-\alpha} \left\{B_{i,\, m-\alpha+1} + \lambda^{(\alpha)}_1 B_{i,\, m-\alpha} + \cdots + \lambda^{(\alpha)}_{m-\alpha} B_{i,\, 1}\right\}. \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Diese können wir aber durch geeignete Wahl der Grössen λ zum Verschwinden bringen, da in der Determinante $|B_{i\kappa}|$ alle Unterdeterminanten $(m-\mu+1)$-ter Ordnung verschwinden. Nehmen wir die λ in dieser Weise gewählt, so haben wir $R = |A_{i\kappa}|$ in eine Determinante R_1 umgeformt, die dem Werthe nach gleich R ist, sich aber dadurch von R unterscheidet, dass in den μ letzten Zeilen alle Elemente durch Functionen ersetzt sind, deren Grad um Eins niedriger ist als der des entsprechenden Elementes in R. Wollen wir das Glied höchster Ordnung in R_1 haben, so haben wir alle Elemente durch ihre Glieder höchster Ordnung zu ersetzen. Auf diese Weise erhalten wir eine Determinante S_1, die dadurch aus der Determinante

$$\bar{S} = |B_{i\kappa}\, y^{n-m+i+\kappa-1}|$$

hervorgeht, dass die Elemente der μ letzten Zeilen durch andere ersetzt werden, die den Factor y in einer um 1 niedrigeren Potenz besitzen. Nun hat in der entwickelten Determinante $\bar{S}$ jedes Glied den Factor y^{mn}. Jedes dieser Glieder enthält aber aus jeder der μ letzten Zeilen ein und nur ein Element. Also enthält jedes Glied der entwickelten Determinante S_1 den Factor $y^{mn-\mu}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Ueber das Integral der Differentialgleichung
$$xy''+y'+xy = 0.$$

(Von Herrn *J. Frischauf* in Graz.)

Im 56. Bd. dieser Zeitschrift giebt Herr *R. Lipschitz* die Entwickelung des einen unter dem Namen *Bessel*sche Function J bekannten particulären Integrals in Form einer semiconvergenten Reihe. Dieselbe Reihenentwickelung lässt sich auch auf das zweite particuläre Integral anwenden, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Das Integral der vorliegenden Differentialgleichung wird am leichtesten erhalten, wenn man es in der Form

$$y = \int_{v_1}^{v_2} e^{xv}\, V\, dv$$

voraussetzt. Die Grössen v_1, v_2 und die Function V werden bestimmt aus

$$\sqrt{1+v^2}\, e^{xv} \Big\}_{v_1}^{v_2} = 0, \quad V = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Für ein positiv vorausgesetztes x erhält man für v_1 und v_2 die Werthe $\pm i$ und $-\infty$; um zwei brauchbare particuläre Integrale zu erhalten, fügt man diesen Werthen noch 0 bei und erhält dann

$$y = C_1 \int_0^{i} \frac{e^{xv}\, dv}{\sqrt{1+v^2}} + C_2 \int_0^{-i} \frac{e^{xv}\, dv}{\sqrt{1+v^2}} + C_3 \int_0^{-\infty} \frac{e^{xv}\, dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

oder nach Sonderung des Reellen und Imaginären

$$y = B_1\int_0^1 \frac{\cos xv\,dv}{\sqrt{1-v^2}} + B_2\left(\int_0^\infty \frac{e^{-xv}\,dv}{\sqrt{1+v^2}} - \int_0^1 \frac{\sin xv\,dv}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

wo B_1 und B_2 willkürliche Constante bedeuten.

Die erste Gleichung der Seite 193 des Aufsatzes von *Lipschitz*, zerfällt durch Sonderung des Reellen und Imaginären in zwei Gleichungen; aus dem Coefficienten von i dieser Gleichung erhält *Lipschitz* die *Bessel*sche Function, d. i. das erste particuläre Integral; aus dem reellen Theile folgt, dass das zweite particuläre Integral gleich ist dem reellen Theile von

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x(v+i)}\,dv}{\sqrt{1+(v+i)^2}}.$$

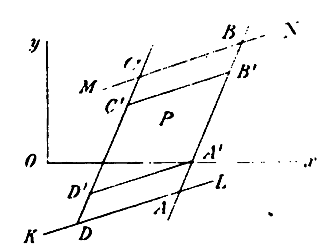
Man ersieht, dass (mit Zuziehung des Factors $\frac{2}{\pi}$) für das zweite particuläre Integral ein Ausdruck folgt, der aus Gleichung (10.) S. 193 erhalten wird, indem man $x-\frac{1}{4}\pi$ durch $x+\frac{1}{4}\pi$ ersetzt.

Wählt man statt der beiden obigen mit y_1 und y_2 bezeichneten particulären Integrale

$$\eta_1 = y_1+y_2, \qquad \eta_2 = y_2-y_1$$

als particuläre Integrale, so erhält man für η_1 und η_2 jene Reihen, die nach *Petzval*s „asymptotischer Integration“ (Integration der linearen Differentialgleichungen, Bd. II, S. 369 ff.) erhalten werden.

cette manière non seulement les résultats connus, mais encore quelques développements, valables dans un demi-plan, qui, à ce que nous croyons, n'ont pas encore été remarqués. Nous supposerons que la fonction $f(x)$ ait un seul pôle dans chaque parallélogramme des périodes, et que ce pôle soit simple. On pourrait traiter au moyen de la même analyse le cas général où dans chaque parallélogramme il existe un nombre quelconque de pôles, avec un degré quelconque de multiplicité; mais on n'en a pas besoin, parce qu'on peut réduire ce cas à l'antérieur au moyen de la formule de décomposition de *Hermite*.



2. Considérons dans le plan de représentation de x un parallélogramme $ABCD$ dont le côté DA représente géométriquement, en grandeur et en direction, la quantité 2ω, et dont le côté AB représente la quantité $2(\alpha+\beta+1)\omega'$, α et β étant deux nombres entiers positifs quelconques.

Dans ce parallélogramme la fonction $f(x)$ a $\alpha+\beta+1$ pôles, qu'on peut représenter par

$$a-2\alpha\omega',\ a-2(\alpha-1)\omega', \dots, a,\ a+2\omega',\ a+4\omega', \dots,\ a+2\beta\omega';$$

et, si l'on représente par k le résidu de la fonction par rapport au pôle a, ces résidus par rapport aux pôles que contient le parallélogramme considéré, sont respectivement

$$c^{-\alpha}k,\ c^{-(\alpha-1)}k, \dots, k,\ ck, \dots, c^{\beta}k.$$

Cela posé, considérons l'intégrale U prise le long du contour S du parallélogramme $ABCD$ considéré; et soit x l'affixe d'un point de l'intérieur de ce parallélogramme.

On trouve, au moyen du théorème fondamental de la théorie des résidus, en remarquant que les résidus de la fonction

$$\frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}$$

par rapport à ses pôles x et $a+2m\omega'$, sont

$$\frac{\omega}{i\pi}f(x), \qquad kc^{m}\cdot\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

la formule suivante:

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \frac{i\pi}{\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} k\,c^m \cdot \frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

qui, à cause de l'égalité

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')}}{e^{\frac{i\pi}{\omega}(a+2m\omega')} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega'),$$

donne

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=+\beta} c^m\left[1 + i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right].$$

Si l'on remarque maintenant que les parties de l'intégrale qui entrent dans cette formule et qui correspondent aux droites AB et DC sont égales, on voit qu'on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_{DA} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \int_{CB} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right]$$

$$- \frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} c^m\left[1 + i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right].$$

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que l'argument de ω soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Nous avons déjà démontré dans ce Journal (T. CXII, p. 119) qu'on a alors, pour tous les points z de la droite DA,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = \frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi z}{\omega}}} + \cdots,$$

et, pour tous les points z de la droite CB,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = -\left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi x}{\omega}}} + \cdots\right].$$

Donc nous avons

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{n i \pi x}{\omega}}$$

$$-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} c^m \left[1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega}(x - a - 2m\omega')\right],$$

où

$$A_n = \frac{1}{2\omega}\int_{DA} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz,$$

$$A_{-n} = \frac{1}{2\omega}\int_{CB} f(z)\, e^{\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz.$$

3. Nous allons maintenant chercher les valeurs des intégrales qui entrent dans les expressions de A_n et de A_{-n}.

Supposons, pour fixer les idées, que la partie imaginaire de ω' soit positive, et considérons le parallélogramme $DAA'D'$ (figure ci-dessus), dont les côtés sont égaux à 2ω et $2\omega'$ et qui contient à l'intérieur le pôle $a - 2\alpha\omega'$. On trouve, en appliquant le théorème fondamental de la théorie des résidus,

$$\int_{DA} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz + \int_{AA'} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz + \int_{A'D'} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz$$

$$+ \int_{D'D} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz = 2 i \pi c^{-\alpha} k e^{-\frac{n i \pi}{\omega}(a - 2\alpha\omega')} = 2 i \pi\, c^{-\alpha}\, k q^{2n\alpha}\, e^{-\frac{n i \pi a}{\omega}},$$

en posant $q = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega}}$;

mais

$$\int_{AA'} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz = \int_{DD'} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz,$$

$$\int_{D'A'} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz = \int_{DA} f(z + 2\omega')\, e^{-\frac{n i \pi}{\omega}(z + 2\omega')}\, dz = q^{-2n} c \int_{DA} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz;$$

donc

$$\int_{DA} f(z)\, e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}}\, dz = \frac{2 i \pi k q^{2n\alpha} c^{-\alpha}}{1 - c q^{-2n}}\, e^{-\frac{n i \pi a}{\omega}},$$

et par conséquent

$$A_n = \frac{i\pi k}{\omega} \cdot \frac{q^{2na} c^{-a}}{1-c q^{-2n}} e^{-\frac{ni\pi a}{\omega}}.$$

On trouve de la même manière, en considérant le parallélogramme $C'B'BC$, qui contient à l'intérieur le pôle $a+2\beta\omega'$,

$$\int_{CB} f(z) e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} dz = \frac{2i\pi k\, q^{2n(1+\beta)} c^{1+\beta}}{1-c q^{2n}} e^{\frac{ni\pi a}{\omega}},$$

et par conséquent

$$A_{-n} = \frac{i\pi k}{\omega} \cdot \frac{q^{2n(1+\beta)} c^{1+\beta}}{1-c q^{2n}} e^{\frac{ni\pi a}{\omega}}.$$

Nous avons donc la formule suivante

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x) = \frac{i\pi k}{\omega}\Big[\frac{c^{-a}}{1-c} + \left(\frac{q^2}{c}\right)^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)a}}{1-c q^{-2n}} e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \\ \quad + (c q^2)^{\beta+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-c q^{2n}} \cdot e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\Big] \\ \quad - \frac{i\pi k}{2\omega} \sum_{m=-a}^{m=\beta} c^m \left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right], \end{cases}$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points d'une zone infinie comprise entre les droites KL et MN.

4. Nous allons considérer les conséquences de cette formule. Mais, avant de le faire, nous introduirons, pour abréger le langage, les notations suivantes. Nous représenterons par K_m la droite qui passe par le pôle $a+2m\omega'$ et qui fait un angle égal à l'argument de ω avec l'axe des abscisses; et nous représenterons par (K_m, ε) celui des demiplans qu'on obtient quand on coupe le plan de représentation de la variable x par la droite K_m, qui contient le point ε.

Cela posé, la première conséquence qu'on tire de la formule (1.) est la formule suivante, qu'on obtient en y posant $\alpha = 0$ et $\beta = 0$:

$$(2.)\quad \begin{cases} f(x) = \frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{-2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} c\, e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-c q^{2n}}\right] \\ \quad - \frac{i\pi k}{2\omega}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a)\right], \end{cases}$$

laquelle a lieu dans la zone comprise entre les droites K_{-1} et K_1.

De cette formule on tire une autre formule importante, en ayant égard au développement suivant:

$$\frac{1}{2}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a)\right] = \frac{1}{1-e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}$$

$$= 1+e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}+e^{\frac{2i\pi}{\omega}(x-a)}+e^{\frac{3i\pi}{\omega}(x-a)}+\cdots,$$

lequel a lieu dans le demi-plan $(K_0,\ a+2\omega')$, si l'on continue à supposer que l'argument de ω soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Cette autre formule est la suivante:

$$(3.)\qquad f(x) = \frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c}{q^{2n}-c}\,e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c\,q^{2n}}{1-c\,q^{2n}}\,e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right],$$

valable dans la zone comprise entre les droites K_0 et K_1.

On peut encore écrire les formules, qu'on vient d'obtenir, de la manière suivante, en posant $c = e^{-\frac{i\pi v}{\omega}}$:

$$(4.)\qquad f(x) = \frac{\pi k}{2\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon\frac{i\pi v}{\omega}}\,\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\varepsilon\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}+\frac{e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a)}\right],$$

où $\varepsilon = +1$, quand n est nul ou positif, et $\varepsilon = -1$, quand n est négatif; et

$$(5.)\qquad f(x) = \frac{\pi k}{2\omega}\,e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}.$$

On tire de cette dernière formule, en y considérant v comme variable et, en posant

$$f_1(x,v) = k^{-1}f(x,v),$$

les égalités

$$f_1(x,v+2\omega) = f_1(x,v),\quad f_1(x,v+2\omega') = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}f_1(x,v).$$

Donc $f_1(x,v)$ est aussi une fonction doublement périodique de v, de seconde espèce, dont les multiplicateurs sont 1 et $e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}$, dont les périodes sont encore 2ω et $2\omega'$, et dont les pôles sont les nombres $2n\omega'$. La formule (5.) fait aussi voir que le résidu de $f_1(x,v)$ par rapport au pôle 0 est égal à l'unité. Nous avons donc encore la formule

$$(5'.)\qquad f(x) = \frac{\pi k}{2\omega} e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{n i \pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')},$$

valable pour toutes les valeurs de x et pour les valeurs de v représentées par les points de la zone comprise entre deux droites qui passent par les points d'affixe 0 e $2\omega'$ et dont l'inclinaison sur l'axe des abscisses est égale à l'argument de K; et la formule

$$(4'.)\qquad f(x) = \frac{\pi k}{2\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)} \frac{e^{\frac{n i\pi}{\omega}(v+\varepsilon\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')} + \frac{e^{\frac{i\pi v}{2\omega}}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}v}\right],$$

valable aussi pour toutes les valeurs de x et pour les valeurs de v représentées par les points de la zone comprise entre deux parallèles aux droites antérieures, menées par les points d'affixe $-2\omega'$ et $2\omega'$.

Les formules qu'on vient d'obtenir sont équivalentes à des formules connues; nous ne nous y arrêterons donc plus, et nous passons à considérer celles qui résultent de (1.) en y posant $\alpha = \infty$, ou $\beta = \infty$.

5. Soit θ l'argument de cq^{2n}. On a alors

$$\begin{aligned} |1-cq^{2n}| &= |1-|cq^{2n}|(\cos\theta+i\sin\theta)| \\ &= \sqrt{1-2|c||q|^{2n}\cos\theta+|c|^2|q|^{4n}} \\ &> \sqrt{1-2|c||q|^{2n}+|c|^2|q|^{4n}}, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$|1-cq^{2n}|^2 > [1-|c||q|^{2n}]^2$$

ou

$$|1-cq^{2n}| > |1-|c||q|^{2n}|.$$

Mais, $|q|$ étant < 1, nous pouvons donner à n_1 une valeur assez grande pour qu'on ait $|c||q^{2n}| < 1$, quand $n \geqq n_1$; et alors on a

$$(\text{A.})\qquad |1-cq^{2n}| > 1-|c||q|^{2n} \geqq 1-|c||q|^{2n_1}$$

quand $n \geqq n_1$.

Cela posé, considérons la série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-cq^{2n}} e^{-\frac{n i\pi}{\omega}(x-a)},$$

qui entre dans la formule (1.), laquelle peut être décomposée dans les sommes

$$\sum_{n=1}^{n=n_1-1} \frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-c\,q^{2n}}\, e^{-\frac{n i \pi}{\omega}(x-a)},$$

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-c\,q^{2n}}\, e^{-\frac{n i \pi}{\omega}(x-a)}.$$

La première somme tend vers $\frac{e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}{1-c\,q^2}$ quand β tend vers l'infini.

Au moyen de l'inégalité (A.) on voit que les valeurs des modules des termes de la deuxième somme sont inférieures aux valeurs des termes correspondantes de la progression géométrique

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \left|\frac{q^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-|c|\,|q|^{2n_1}}\right| \left|e^{-\frac{n i \pi}{\omega}(x-a)}\right|,$$

dont la raison est égale à

$$|q^{2(1+\beta)}|\left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|;$$

et, comme on peut donner à β' une valeur assez grande pour qu'on ait

$$|q^{2(1+\beta)}|\left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|<1$$

quand $\beta \gtreqless \beta'$, on voit aussi que la somme de cette progression est alors égale à

$$\frac{|q^{2(n_1-1)(1+\beta)}|\left|e^{-\frac{n_1 i\pi}{\omega}(x-a)}\right|}{[1-|c|\,|q|^{2n_1}]\left[1-|q|^{2(1+\beta)}\left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|\right]},$$

et qu'elle tend vers zéro quand β tend vers l'infini.

Nous avons donc

$$\lim_{\beta=\infty} |S| = \left|\frac{e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}{1-c\,q^2}\right|.$$

Si l'on remarque maintenant que $|cq^2|^{\beta+1}$ tend vers zéro quand β tend vers l'infini, lors qu'on a $|cq^2|<1$, on tire de la formule (1.), en y posant $\alpha=0$ et $\beta=\infty$, le développement suivant:

$$(6.)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{i\pi k}{\omega}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-c\,q^{-2n}}\right] \\ \qquad - \dfrac{i\pi k}{2\omega}\sum\limits_{m=0}^{\infty} c^m\left[1+i\cot\dfrac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right] \end{cases}$$

valable dans le demi-plan (K_{-1}, ∞) et applicable quand $|c|<|q|^{-2}$.

En posant $c = e^{-\frac{i\pi v}{\omega}}$, on peut écrire cette formule de la manière suivante:

$$(7.)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi k}{2\omega}\left[e^{\frac{i\pi v}{2\omega}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\omega')}}{\sin\dfrac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}\right. \\ \qquad \left. + e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\dfrac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega')}\right]. \end{cases}$$

6. Pour déterminer les valeurs qu'on peut donner à v dans cette formule, on doit remarquer que l'inégalité $|c\,q^2|<1$ peut être écrite de la manière suivante:

$$\left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(v-2\omega')}\right|<1,$$

ou, en représentant par θ, θ' et τ les arguments de ω, ω' et v,

$$|v|\sin(\tau-\theta) < 2\,|\omega'|\sin(\theta'-\theta).$$

Donc la distance du point d'affixe v à la droite qui passe par l'origine et fait un angle égal à θ avec l'axe des abscisses, doit être plus petite que la distance du point d'affixe $2\omega'$ à la même droite. En représentant donc par L_n la droite qui passe par le point d'affixe $2n\omega'$ et qui fait l'angle θ avec l'axe des abscisses, on peut dire que la formule antérieure est valable dans le demi-plan $(L_1, -\infty)$. On suppose toujours θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Dans le cas particulier où a s'évanouit, le développement précédent est applicable dans la région du plan située au-dessus de K_{-1}, pour ce qui concerne x, et dans la région du plan située au-dessous de L_1, pour ce qui concerne v.

7. On a vu déjà (No. 4) que $k^{-1}f(x)$ est une fonction doublement périodique de v, dont les périodes sont 2ω et $2\omega'$, les multiplicateurs 1 et

$e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}$, et les pôles les nombres $2n\omega'$. On a vu aussi que le résidu de cette fonction par rapport au pôle 0 est égal à 1. Si l'on pose donc dans la formule antérieure $a = 0$ et que l'on change ensuite x en v et v en $x-a$, on obtient la formule

$$(8.)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi k}{2\omega}\left[e^{\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(v+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')} \right. \\ \qquad\qquad \left. + e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')} \right], \end{cases}$$

valable dans le demi-plan (L_{-1}, ∞), pour ce qui concerne v, et dans le demi-plan $(K_1, -\infty)$, pour ce qui concerne x.

8. Considérons le cas particulier où l'on a $|c| < 1$. Alors la formule (6.) peut encore être écrite de la manière suivante

$$(9.)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{i\pi k}{\omega}\left[\dfrac{1}{2(1-c)} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{-2n}} \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{i}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n \cot\dfrac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega')\right], \end{cases}$$

ou encore, en posant $c = e^{-\frac{i\pi v}{\omega}}$,

$$(10.)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{\pi k}{2\omega} e^{\frac{i\pi v}{2\omega}} \left[\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi v}{2\omega}} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v+2n\omega')}\right] \\ \qquad\qquad + \dfrac{\pi k}{2\omega} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi v}{\omega}} \cot\dfrac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega'). \end{cases}$$

Cette dernière formule est applicable dans le demi-plan $(L_0, -\infty)$.

9. Nous allons maintenant chercher les formules qui résultent de (1.) en y posant $\alpha = \infty$.

Considérons, pour cela, la série

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1-cq^{-2n}} e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}.$$

On voit, en premier lieu, comme dans le cas de la série S considérée antérieurement, qu'on a

$$|1-c\,q^{-2n}| > ||c|\,|q|^{-2n}-1|.$$

Mais, comme $|q|<1$, on peut donner à n_2 une valeur qui fasse

$$|c|\,|q|^{-2n} > 1$$

quand $n \gtreqless n_2$; et alors nous avons

$$|1-c\,q^{-2n}| > |c|\,|q|^{-2n_2}-1$$

quand $n \gtreqless n_2$.

Cela posé, décomposons la série s dans les sommes

$$\sum_{n=1}^{n_2-1} \frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1-c\,q^{-2n}}\, e^{\frac{n i\pi}{\omega}(x-a)},$$

et

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1-c\,q^{-2n}}\, e^{\frac{n i\pi}{\omega}(x-a)}.$$

La première somme tend vers la limite $\dfrac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}{1-c\,q^{-2}}$, quand α tend vers l'infini.

Les valeurs des modules des termes de la deuxième somme sont inférieures aux valeurs des termes correspondants de la progression géométrique

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{|q|^{2(n-1)\alpha}}{|c|\,|q|^{2n_2}-1}\left|e^{\frac{n i\pi}{\omega}(x-a)}\right|,$$

dont la raison est

$$|q|^{2\alpha}\left|e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|.$$

On peut donc donner à α' une valeur assez grande pour qu'on ait

$$|q|^{2\alpha}\left|e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right| < 1$$

quand $\alpha \geqq \alpha'$; et alors le module de la somme considérée sera inférieur à

$$\frac{|q|^{2(n_2-1)\alpha}\left|e^{\frac{n_2 i\pi}{\omega}(x-a)}\right|}{[|c|\,|q|^{2n_2}-1]\left[1-|q|^{2\alpha}\left|e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|\right]},$$

et tend, par conséquent, vers zéro quand α tend vers l'infini.

Donc la somme s tend vers la limite $\frac{e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}}{1-cq^{-2}}$ quand α tend vers l'infini.

10. Nous pouvons maintenant voir ce qui arrivera lorsqu'on pose en (1.) $\beta = 0$, $\alpha = \infty$.

1er *cas.* Soit $|c| > 1$. On a alors aussi $|c| > |q|^2$; et la formule (1.) donne la suivante:

$$(11.)\quad \begin{cases} f(x) = \frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cq^{2n}}{1-cq^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right] \\ \qquad -\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=0}^{\infty}c^{-m}\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2m\omega')\right], \end{cases}$$

valable dans le demi-plan $(K_1, -\infty)$.

On peut écrire encore cette formule de la manière suivante:

$$(12.)\quad \begin{cases} f(x) = \frac{\pi k}{2\omega}\left[e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}\right. \\ \qquad \left. + e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{mi\pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2m\omega')}\right]. \end{cases}$$

Cette formule est valable dans le demi-plan (L_0, ∞), pour ce qui concerne v; et dans le demi-plan $(K_1, -\infty)$, pour ce qui concerne x.

On peut enfin écrire la formule (11.) de la manière suivante:

$$f(x) = \frac{\pi k}{2\omega}e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}}\left[\frac{1}{2\sin\frac{\pi v}{2\omega}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}\right]$$
$$+\frac{\pi k}{2\omega}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{ni\pi v}{\omega}}\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega').$$

2ème *cas.* Si $|c| < 1$ et aussi $|c| > |q|^2$, la formule (1.) donne, en y posant $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, la suivante:

$$f(x) = \frac{i\pi k}{\omega}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cq^{2n}}{1-cq^{2n}}e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}\right]$$
$$-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{n=0}^{\infty}c^{-n}\left[i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')-1\right],$$

valable dans le demi-plan $(K_1, -\infty)$.

On peut encore écrire cette formule de la manière suivante:

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}\left[e^{-\frac{i\pi v}{2\omega}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(v-2n\omega')}\right.$$
$$\left.+\,e^{\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{ni\pi}{\omega}(v+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a+2n\omega')}\right],$$

où v représente l'affixe d'un point quelconque de la zone comprise entre les droites L_0 et L_{-1}. Cette formule coïncide avec (8.); elle est donc applicable dans une aire plus large, pour ce qui concerne v, que celle que donne la méthode au moyen de laquelle on vient de la trouver.

11. Supposons maintenant qu'on ait

$$|q|^{-2}>|c|>|q|^2.$$

La formule (1.) donne alors

$$\text{(B.)}\qquad f(x)=-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c^m\left[1+i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right],$$

lorsque $|c|>1$; et

$$f(x)=-\frac{i\pi k}{2\omega}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c^m\left[i\cot\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')-1\right]$$

lorsque $|c|<1$.

Ces développements sont valables dans tout le plan de représentation de la variable x et peuvent encore être écrits de la manière suivante:

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(v-\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega')},$$

et

$$f(x)=\frac{\pi k}{2\omega}e^{\frac{i\pi}{2\omega}(x-a)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(v+\omega')}}{\sin\frac{\pi}{2\omega}(x-a-2n\omega')}.$$

Dans la première formule on doit donner à v les valeurs représentées par les points de la zone comprise entre les droites L_0 et L_1, et dans la deuxième les valeurs représentées par les points de la zone comprise entre les droites L_0 et L_{-1}.

La première de ces formules coïncide avec (5'.). La deuxième ne diffère pas essentiellement de la première, puisqu'on passe de la deuxième à la première au moyen de la formule

$$f(x, v) = e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)} f(x, v-2\omega').$$

12. Considérons maintenant le cas où $|c| = 1$. La formule (1.) donne alors, en y posant $\alpha = \infty$ et $\beta = \infty$,

$$f(x) = \frac{i\pi k}{\omega} \lim_{\alpha=\infty} \left[\frac{c^{-\alpha}}{1-c} - \frac{1}{2} \sum_{m=-\alpha}^{\infty} c^m \left(1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right)\right].$$

Dans le cas particulier où $c = -1$, on a, en supposant que α soit un nombre entier *pair*, égal à $2t$,

$$f(x) = \frac{i\pi k}{2\omega}\left[1 - \lim_{t=\infty} \sum_{m=-2t}^{\infty} (-1)^m \left(1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right)\right],$$

et, en supposant $\alpha = 2t + 1$,

$$f(x) = \frac{i\pi k}{2\omega}\left[-1 - \lim_{t=\infty} \sum_{m=-(2t+1)}^{\infty} (-1)^m \left(1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right)\right].$$

Ces deux formules donnent, en réunissant, dans chacune, les termes consécutifs, deux à deux,

$$(13.)\quad f(x) \mp \frac{i\pi k}{2\omega} = \mp \frac{\pi k}{2\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \frac{\omega'}{\omega}}{\sin \frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega') \sin \frac{\pi}{2\omega}(x-a-2(m+1)\omega')}$$

où m est un nombre *pair* dans le cas du signe supérieur et *impair* dans le cas du signe inférieur.

La première des formules considérées donne encore, en réunissant les termes consécutifs, deux à deux, excepté celui qui correspond à $m = 0$,

$$(14.)\quad \begin{cases} f(x) = \frac{\pi k}{2\omega}\Big[\cot \frac{\pi}{2\omega}(x-a) \\ \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \frac{\omega'}{\omega}}{\sin \frac{\pi}{2\omega}[x-a-2(2n-1)\omega'] \sin \frac{\pi}{2\omega}[x-a-4n\omega']} \\ \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \frac{\omega'}{\omega}}{\sin \frac{\pi}{2\omega}[x-a+2(2n-1)\omega'] \sin \frac{\pi}{2\omega}[x-a+4n\omega']}\Big]. \end{cases}$$

13. On peut encore déduire de (1.) un autre développement de $f(x)$, applicable aussi lorsque $c = -1$. En effet, si l'on y pose $\alpha = \beta$, il vient

$$f(x) = (-1)^{\alpha} \frac{i\pi k}{\omega} \Big[\frac{1}{2} + q^{2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)\alpha}}{1+q^{-2n}} e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)}$$

$$- q^{2(\alpha+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2(n-1)(1+\alpha)}}{1+q^{2n}} e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \Big]$$

$$- \frac{i\pi k}{2\omega} \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} (-1)^m + \frac{\pi k}{2\omega} \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} (-1)^m \cot \frac{\pi}{2\omega} (x-a-2m\omega'),$$

et, en posant ensuite $\alpha = \infty$,

$$f(x) = \frac{\pi k}{2\omega} \lim_{\alpha=\infty} \sum_{m=-\alpha}^{\alpha} (-1)^m \cot \frac{\pi}{2\omega} (x-a-2m\omega').$$

14. On peut changer les rôles des périodes 2ω et $2\omega'$ dans la formule (1.) et dans celles qui en découlent, ce qui conduit à un nouveau groupe de formules, comme on va voir.

Considérons la fonction

$$F(x) = f(x)\, e^{-\frac{ux}{2\omega'}},$$

où $u = \log c$.

On a, en posant $c_1 = e^{\frac{u\omega}{\omega'}}$,

$$F(x+2\omega') = F(x),$$

$$F(x-2\omega) = e^{\frac{u\omega}{\omega'}}, \qquad F(x) = c_1 F(x).$$

Si l'on applique maintenant la formule (1.) à la fonction $F(x)$ et que l'on remarque que son résidu par rapport au pôle a est égal à $k e^{-\frac{ua}{2\omega'}}$, on trouve la formule suivante:

$$(15.) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{i\pi k}{\omega'} e^{\frac{u(x-a)}{2\omega'}} \Big[\frac{c_1^{-\alpha}}{1-c_1} \\ \quad + \left(\frac{q_1^2}{c_1}\right)^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^{2(n-1)\alpha}}{1-c\, q_1^{-2n}} e^{\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \\ \quad + (c_1 q_1^2)^{\beta+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^{2(n-1)(1+\beta)}}{1-c_1 q_1^{2n}} e^{-\frac{ni\pi}{\omega}(x-a)} \\ \quad - \frac{1}{2} \sum_{m=-\alpha}^{m=\beta} c_1^m \Big[1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega} (x-a+2m\omega) \Big]. \end{cases}$$

Dans cette formule on a $q_1 = e^{-i\pi\frac{\omega}{\omega'}}$, et par conséquent $|q_1| < 1$.

On tire de cette formule des conséquences analogues à celles qu'on tire de la formule (1.)

Considérons, en particulier, le cas où $c = -1$, et par conséquent $u = i\pi$.

Alors $|c_1||q_1| = 1$, on aura donc

$$|q_1|^{-2} > |c_1| > |q_1|^2, \qquad |c_1| > 1.$$

Nous pouvons donc appliquer la formule (B.), qui donne

$$f(x) = -\frac{i\pi k}{2\omega'} e^{\frac{i\pi(x-a)}{2\omega'}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_1^m \left[1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega'}(x-a+2m\omega)\right]$$

ou

$$(16.) \qquad f(x) = \frac{\pi k}{2\omega'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\omega'}(x-a+2m\omega)}.$$

On trouve cette formule dans l'ouvrage de ***Briot*** et ***Bouquet*** (p. 287).

15. Nous ne terminerons pas ce que nous avons ici à dire sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce en série trigonométrique sans remarquer que de l'égalité (1.) et de ce qu'on a dit dans les n°s 5 et 9 on conclut que la formule

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{i\pi k}{\omega} \Bigg[& \sum_{n=0}^{n_2} \frac{q^{2n\alpha'} c^{-\alpha}}{1 - c q^{-2n}} e^{\frac{n i \pi}{\omega}(x-a)} \\ & + \sum_{n=1}^{n_1} \frac{q^{2n(1+\beta')} c^{\beta'+1}}{1 - c q^{2n}} e^{-\frac{n i \pi}{\omega}(x-a)} \Bigg] \\ & - \frac{i\pi k}{2\omega} \sum_{m=-\alpha'}^{\beta'} c^m \left[1 + i \cot \frac{\pi}{2\omega}(x-a-2m\omega')\right], \end{aligned}$$

où $n_1, n_2, \alpha', \beta'$ sont des nombres qu'on détermine d'après ce qu'on a dit dans les n^{os} mentionnés, représente $f(x)$ avec une approximation plus grand que le nombre donné par l'expression

$$\frac{|q^{2(n_1-1)(1+\beta')}| \left|e^{-\frac{n_1 i \pi}{\omega}(x-a)}\right|}{[1-|c||q|^{2n_1}][1-|q|^{2(1+\beta')}] \left|e^{-\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|} + \frac{|q^{2(n_2-1)\alpha'}| \left|e^{\frac{n_2 i \pi}{\omega}(x-a)}\right|}{|1-|c||q|^{2n_2}| [1-|q|^{2\alpha'}] \left|e^{\frac{i\pi}{\omega}(x-a)}\right|}.$$

16. Pour faire une application des formules précédentes, considérons la fonction, étudiée par *Jacobi* et *Hermite*

$$f(x) = \frac{H'(o)\Theta(x+v)}{H(v)\Theta(x)},$$

qui satisfait aux conditions

$$f(x+2K) = f(x),$$

$$f(x+2iK') = e^{-\frac{i\pi v}{K}} f(x),$$

et admet le pôle $-iK'$ dans un parallélogramme des périodes, auquel correspond le résidu

$$k = e^{\frac{i\pi v}{2K}}.$$

En posant alors dans la formule (5.)

$$\omega = K,\ \omega' = iK',\ c = e^{-\frac{i\pi v}{K}},\ q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},\ a = -iK',$$

on obtient la formule

$$f(x) = \frac{\pi}{2K}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(v+2niK')},$$

valable dans tout le plan, pour ce qui concerne v, et dans la zone comprise entre les droites K_0 et K_1, qui passent par les pôles $-iK'$ et iK' et dont l'inclinaison sur l'axe des abscisses est égale à l'argument de K, pour ce qui concerne x.

La formule qu'on vient d'obtenir fut donnée par *Hermite* dans son beau et important Mémoire — *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (1885, p. 19).

Appliquons la formule (7.) à la même fonction; si l'on considère maintenant le parallélogramme des périodes qui contient le pôle iK', et que l'on pose, par conséquent

$$k = e^{-\frac{i\pi v}{2K}},\ a = iK',$$

il vient

$$f(x) = \frac{\pi}{2K}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi x}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(v+2niK')} + e^{-\frac{i\pi x}{2K}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2n+1)i\pi}{2K}(v-iK')}}{\sin\frac{\pi}{2K}[x-(2n+1)iK']}\right].$$

Cette formule est applicable aux valeurs de x représentées par les points du demi-plan situé au-dessus de la droite K_{-1} (l'argument de K étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$). Les valeurs qu'on peut attribuer à v dans la même formule sont représentées par les points du demi-plan situé au-dessous de la droite L_1, qui passe par le pôle $2iK'$ et fait un angle égal à l'argument de K avec l'axe des abscisses.

Si l'on applique à la même fonction la formule (5'.) on trouve, en posant $a = -iK'$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2K} e^{-\frac{i\pi x}{2K}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2K}(v-iK')}}{\sin\frac{\pi}{2K}[x+(2n+1)iK']},$$

valable pour toutes les valeurs de x, et pour les valeurs de v représentées par les points de la zone comprise entre la droite L_1 et la parallèle L_0, qui passe par le point d'affixe 0.

La formule (8.) donne enfin, en posant $a = -iK'$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2K}\left[e^{\frac{i\pi x}{2K}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2K}(v+iK')}}{\sin\frac{\pi}{2K}[x+(2n+1)iK']} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{ni\pi x}{K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(v-2niK')}\right],$$

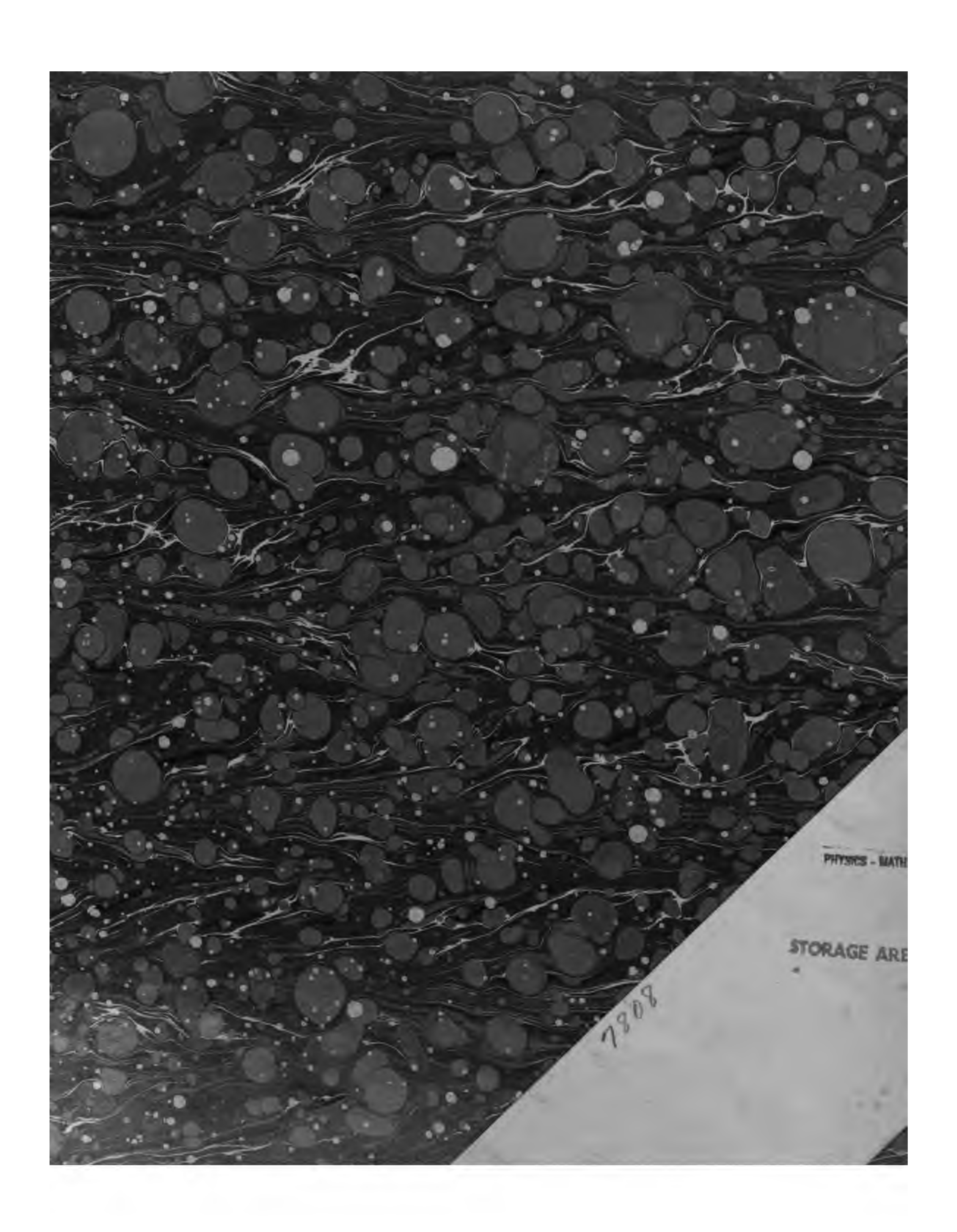
valable dans le demi-plan (L_{-1}, ∞), pour ce qui concerne v, et dans le demi-plan $(K_1, -\infty)$, pour ce qui concerne x.

Band 125. Heft IV.

Inhaltsverzeichniss.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich unter der Adresse:**
An die Redaction des Journals für die reine und angewandte **Mathematik,**
Professor Dr. Kurt Hensel. Marburg a./L., Universitätsstrasse 54.





PHYSICS - MATH
STORAGE ARE
7808

